

SÉRIE A, N° 3066

N° D'ORDRE :

3938

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

CHARLES MORETTI

1^{re} THÈSE. — SUR L'EMPLOI DE LA MÉTHODE PHOTOÉLASTIQUE POUR
L'ÉTUDE DES CONTRAINTES RÉSIDUELLES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 17 juin 1957 devant la Commission d'examen.

MM. LUCAS	<i>Président.</i>
THIRY.....	} <i>Examineurs.</i>
MALAVARD.....	

PARIS

MASSON ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE

120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN

1958



SÉRIE A, N° 3066

N° D'ORDRE :

3938

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

CHARLES MORETTI

1^{re} THÈSE. — SUR L'EMPLOI DE LA MÉTHODE PHOTOÉLASTIQUE POUR
L'ÉTUDE DES CONTRAINTES RÉSIDUELLES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 17 juin 1957 devant la Commission d'examen.

MM. LUCAS *Président.*

THIRY..... } *Examinateurs.*
MALAVARD..... }

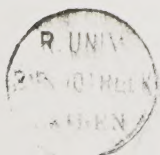
PARIS

MASSON ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE

120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN

1958



FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

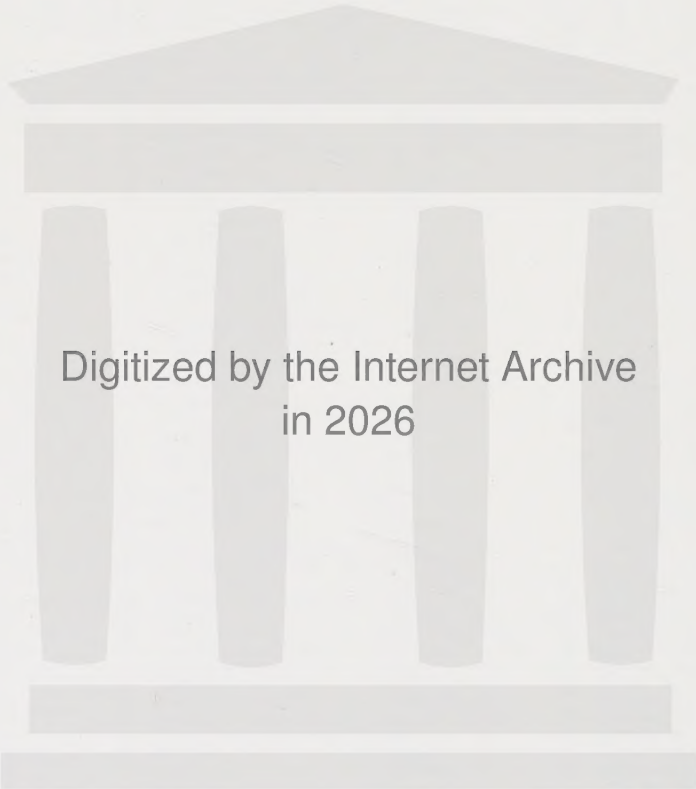
Doyen J. PÉRÈS

PROFESSEURS

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	JANET	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
E. DARMOIS	T	Enseignement de Physique.	PETIT	T	Biologie maritime.
FOCH	T	Mécanique physique et expérimentale.	QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
PAUTHENIER	T	Electrotechnique générale	GALLIEN	T	Embryologie.
DE BROGLIE	T	Théories physiques.	EICHBORY	T	Biologie végétale (P.C.B.)
JOB	T	Chimie générale.	DE CUGNAC	T	Biologie végétale (P.C.B.)
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.	M ^{lle} CAUGROIS	T	Chimie physique.
GARNIER	T	Géométrie supérieure.	TRELLIER	T	Physique du Globe.
PÉRÈS	T	Mécanique des fluides et applications.	AUDUBERT	T	Electrochimie.
LAUGIER	T	Physiologie générale.	L'HÉRITIER	T	Génétique.
M. CURIE	T	Physique (P.C.B.).	GRIVET	T	Radioélectricité.
BARBARÉ	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.	PONCIN	T	Mécanique des fluides.
G. DARMOIS	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	THIERY	T	Mécanique appliquée.
J. BOURCART	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	DUBREIL	T	Arithmétique et théorie des nombres.
PLANTEFOL	T	Botanique.	QUELET	T	Chimie organique.
GRASSÉ	T	Évolution des êtres organisés.	CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.
PRÉVOST	T	Chimie organique.	CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire.
BOULIGAND	T	Application de l'analyse à la Géométrie.	CUVILLIER	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.
CHAUDRON	T	Chimie appliquée.	JUNE	T	Pétrographie.
WYART	T	Minéralogie.	TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électronique.
TEISSIER	T	Zoologie.	WIEMANN	T	Chimie organ. structurale.
MANGENOT	T	Biologie végétale.	JACQUINOT	T	Spectroscopie et Physique céleste.
P. AUGER	T	Physique quantique et Relativité.	VASSY		Physique de l'atmosphère.
MONNIER	T	Physiologie des fonctions.	DESTOUCHES		Théories physiques.
PIVETEAU	T	Géologie.	M. PRUVOST	T	Géologie.
ROCARD	T	Physique (E.N.S.).	AMIEL	T	Chimie (P.C.B.).
H. CARTAN	T	Mathématiques (E.N.S.).	HOCART	T	Minéralogie.
LAFFITTE	T	Chimie générale.	J.-P. MATHIEU	T	Physique (P.C.B.).
FAYARD	T	Mécanique générale.	COUTEAUX	T	Biologie animale (P.C.B.)
COULOMB	T	Physique du Globe.	MAY	T	Biologie animale (P.C.B.)
M ^{lle} COUSIN	T	Biologie animale (P.C.B.)	CHOQUET	T	Calcul diff. et intégral.
CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.	FELDMANN		Biologie (P.C.B.).
P. DRACH	T	Zoologie.	GUINIER	T	Physique (P.C.B.).
KASTLER	T	Physique.	JOST	T	Biologie (P.C.B.).
EPHRAÏM	T	Génétique.	FORGET	T	Calcul des probabilités.
WURMSER	T	Biol. physico-chimique.	SCHWARTZ	T	Méthodes mathématiques de la Physique.
RIVIÈRE	T	Géologie (S.P.C.N.).	CHOUARD	T	Physiologie végétale.
GAUTHERET	T	Biologie végétale (P.C.B.)	MALAYOT	T	Aviation.
LUCAS	T	Recherches physiques.	BRELOT	T	Calcul différentiel.
A. THOMAS	T	Biologie cellulaire.	NORMANT	T	Chimie (P.C.B.).
ARNULF	T	Optique appliquée.	BÉNARD	T	Chimie (P.C.B.).
MAX MORAND	T	Physique.	BUYAT	T	Botanique (E.N.S.).
SOLEILLET	T	Physique.	DUGÈRE	T	Statistiques mathématiques.
FORTIER	T	Mécanique expérimentale des fluides.	GELOSO		Chimie (S.P.C.N.).
DANJON	T	Astronomie.	SOULAIRAC	T	Psychophysologie.
FROMAGEOT	T	Chimie biologique.	ULRICH	T	Physiologie végétale.
LAPORTE	T	Physique générale et Radioactivité.	MARÉCHAL	T	Optique théorique et appliquée.
			KIRRMANN	T	Théories chimiques.
			CHADEFAUD		Botanique.

DESTRIAU	T	Physique (M.P.C.).	DIXMIER	Mathématiques (M.P.C.)
M ^{lle} LE BRETON ..		Physiologie générale.	SOUGHAY	Chimie (P.C.B.).
SALEM	T	Mathématiques générales.	AIGRAIN	Physique (P.C.B.).
LELONG	T	Mathématiques générales.	BRUSSET	Chimie (P.C.B.).
DEVILLERS		Anatomie et Histologie comparées.	M. LEVY	Physique théorique.
EHRESMANN	T	Topologie algébrique.	LENORMANT	Physiologie.
FRANÇON		Physique (M.P.C.).	M ^{me} CHAIX	Chimie biologique.
GLANGEAUD	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	M ^{me} HUREL-PY ...	Biologie végétale (P.C.B.).
GODEMENT	T	Mathématiques (M.P.C.).	PIAUX	Chimie (P.C.B.).
PISOT	T	Calcul des probabilités.	BRUN	Mécanique expérimentale des fluides.
E. ROCH		Géologie.	LEDERER	Chimie biologique.
SCHATZMANN		Astrophysique	M ^{me} DUBREIL-JACO-	
TERMIER	T	Paléontologie stratigraphique.	TIN	Mathématiques.
ZAMANSKY	T	Mathém. générales.	M ^{me} LELONG - FER-	
JOLIOT	T	Physique nucléaire et radioactivité.	RAND	Mathématiques (E.N.S.).
LENNUIER		Physique (P.C.B.).	BELLAIR	Géologie (S.P.C.N.).
RIZET		Génétique.	COTTE	Physique (M.P.C.).
M ^{me} TONNELAT ...		Théories physiques.	J. DUBOIS	Chimie.
			LAMOTTE	Zoologie (E.N.S.).
			LE ROLLAND	Mécanique des fluides.
			MICHEL	Chimie (P.C.B.).

Secrétaire Général Ch. MONIER.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

A MES PARENTS

Je dois à la haute bienveillance de M. René Lucas, Directeur de l'Ecole Supérieure de Physique et Chimie, Professeur à la Sorbonne, la possibilité d'avoir pu exécuter ce travail dans les laboratoires de l'Ecole Supérieure de Physique et Chimie de la Ville de Paris. Que M. Lucas trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

M. Le Boiteux, Professeur à l'Ecole Supérieure de Physique et Chimie, Directeur Scientifique à l'Office National d'Etudes et Recherches Aéronautiques, a dirigé ce travail. Il m'a toujours donné les conseils et l'appui dont j'avais besoin. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je dois à M. Pomey, Directeur Scientifique à la Régie Nationale des Usines Renault, de nombreux conseils et une aide précieuse. Il m'a en particulier permis de comprendre les phénomènes de diffusions se produisant au sein des corps de condensation. Qu'il en soit vivement remercié.

Que tous les collègues ou amis qui m'ont aidé trouvent ici le témoignage de ma gratitude. Je veux remercier tout particulièrement Mme Pauthier dont l'esprit critique et l'aide m'ont été fort utiles, M. A. Martin pour ses conseils et sa bienveillance, M. Tritten pour son aide dans l'étude expérimentale, M. Abel enfin, avec qui j'ai discuté les parties théoriques de ce travail.

Je remercie la Régie Nationale des Usines Renault pour l'aide matérielle qu'elle a apportée à cette étude.

SUR L'EMPLOI DE LA MÉTHODE PHOTOÉLASTIQUE POUR L'ÉTUDE DES CONTRAINTES RÉSIDUELLES ⁽¹⁾

Par CHARLES MORETTI

SOMMAIRE

BUT DE L'ÉTUDE.

INTRODUCTION.

Définition des contraintes résiduelles.

Origine des contraintes résiduelles.

Contraintes résiduelles de dilatation.

Contraintes résiduelles de distorsion.

Étude mathématique de la distribution des contraintes résiduelles.

Le problème plan.

Problème des déformations planes.

Problème des contraintes planes.

Étude du groupe d'équations (II).

Conclusion à l'étude du problème plan.

Le problème tridimensionnel.

Équations de la distribution des contraintes.

Étude de ces équations.

Conclusion.

(1) Thèse présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences physiques et soutenue le 17 juin 1957 devant la commission d'examen.

Détermination expérimentale de la distribution des contraintes résiduelles.

Développement de biréfringence résiduelle.

Étude des mécanismes de développement.

Liaison entre la biréfringence résiduelle et les contraintes résiduelles.

Lois des contraintes résiduelles de dilatation.

Calcul des contraintes résiduelles par photoélasticité.

Vérification expérimentale.

Étude de diverses matières photoélastiques.

Dispositif expérimental.

Essais sur la bakélite BT 61893.

Essais sur l'allite ou CR 39.

Essais sur l'araldite B.

Essais sur le plexiglas.

Conclusion à l'étude expérimentale.

Applications à quelques cas simples.

Principe des autres méthodes.

Détermination du produit $\sqrt{Dt}$.

Distribution de contraintes résiduelles pour des pièces de formes simples.

Poutre.

Plan méridien.

Cylindre de base elliptique.

CONCLUSION.

CONCLUSION GÉNÉRALE.

BUT DE L'ÉTUDE

Ce travail se propose de rechercher si l'emploi de la méthode photoélastique peut être utilisé pour la détermination des contraintes résiduelles d'une pièce.

La photoélasticité, dont de nombreux ouvrages, cf. (7) et (9), exposent les principes et les méthodes d'utilisation, est, lorsqu'elle peut être utilisée, un des moyens les mieux adaptés pour déterminer la distribution des contraintes d'une pièce soumise à des efforts.

C'est une transposition de ces méthodes que nous avons essayé de faire pour déterminer des distributions de contraintes résiduelles,

c'est-à-dire de contraintes existant dans un corps, alors que celui-ci n'est soumis à aucun effort extérieur.

De nombreux auteurs, cf. (3) et (4) ont remarqué l'analogie de formation de certains types de contraintes résiduelles, d'une part, dans les aciers, d'autre part, dans les matières photoélastiques. Les contraintes résiduelles de cémentation ou de nitruration ont pour origine la diffusion d'atomes de carbone ou d'azote dans la maille du fer. De même le phénomène « d'effet de bord » qui se manifeste par l'apparition d'une biréfringence bordant les plaques photoélastiques, est souvent dû aux contraintes développées par la diffusion de molécules d'eau dans les interstices des chaînes macromoléculaires.

Le plan de notre travail se présente ainsi :

— Une introduction où nous définirons le terme contrainte résiduelle, les propriétés de ces contraintes et leurs principales origines. Nous serons amenés à distinguer entre deux types de contraintes résiduelles.

— Dans un premier chapitre nous nous proposerons d'établir les équations mathématiques qui régissent la distribution des contraintes résiduelles d'une pièce. L'étude de ces systèmes d'équations nous permettra de préciser dans quelles conditions une méthode d'analogie pour l'étude de la répartition des contraintes est possible.

— Dans un deuxième chapitre, plus expérimental, nous chercherons à développer des contraintes résiduelles dans les matières photoélastiques. Nous devons démontrer que ces contraintes, que nous atteignons par des mesures de biréfringence, obéissent bien aux équations mathématiques précédemment démontrées. S'il en est bien ainsi les résultats déduits de ces études seront utilisables.

— Enfin, dans une troisième partie nous appliquerons cette méthode à quelques cas simples. Nous comparerons, en particulier, les résultats obtenus soit par la méthode photoélastique, soit par d'autres méthodes.

Cette dernière partie nous permettra de porter, en conclusion, un jugement sur la validité de la méthode photoélastique que nous avons essayé de mettre au point. Nous verrons, en particulier, les renseignements qu'elle peut nous permettre d'atteindre aisément.

INTRODUCTION

DÉFINITION DES CONTRAINTES RÉSIDUELLES. — Les contraintes résiduelles sont des contraintes en équilibre qui existent dans un corps alors que celui-ci n'est soumis à aucune action extérieure. Des exemples courants de pièces possédant des contraintes résiduelles sont fournis

par les pièces métalliques ayant subi un traitement de surface (trempe, cémentation, nitruration, galetage).

Si l'on veut déterminer des contraintes résiduelles il est nécessaire de connaître leur origine. Nous rappellerons ici brièvement les deux grandes catégories dans lesquelles on peut les classer.

Contraintes résiduelles de dilatation. — Par suite du traitement la maille unité de la pièce subit ici une dilatation isotrope. Les contraintes qui se développent dans un corps qui n'est pas en équilibre thermique répondent à cette définition. Mais de nombreux autres traitements créent des contraintes de ce type. Le phénomène de nitruration, c'est-à-dire de diffusion d'atomes d'azote dans la maille du fer et précipitation du nitrure en est un autre exemple. La cause physique ou chimique qui produit ce phénomène obéit généralement à une loi de diffusion.

La caractéristique de ce type de contraintes est que la dilatation provoquée en un point étant la même dans toutes les directions, elle ne crée pas de glissement.

Contraintes résiduelles de distorsion. — Si les dilatations provoquées par le traitement ne sont pas isotropes, il y a distorsion de la maille unité de la pièce. Des contraintes résiduelles de ce type sont créées dans le laminage, l'étirage, le grenaillage... Ces contraintes qui sont complexes ne seront pas étudiées ici.

Cette distinction de l'origine des contraintes résiduelles se traduit simplement dans les lois de Hooke utilisées pour le calcul, cf. (12).

Elles s'écrivent dans le cas le plus général :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} Ee_x = \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) + E\delta_x \\ Ee_y = \sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) + E\delta_y \\ Ee_z = \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) + E\delta_z \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} G\gamma_{xy} = \tau_{xy} + G\delta_{xy} \\ G\gamma_{yz} = \tau_{yz} + G\delta_{yz} \\ G\gamma_{zx} = \tau_{zx} + G\delta_{zx} \end{array} \right.$$

E : module d'Young ; ν : coefficient de Poisson ;

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

avec : e_x, e_y, e_z : extensions $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: contraintes $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$: glissements $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$: cisaillements $\delta_x, \delta_y, \delta_z, \delta_{xy}, \delta_{yz}, \delta_{zx}$ extensions et glissements provoqués par le traitement de la pièce.

Dans le cas où les contraintes résiduelles ont pour origine une dilatation isotrope on a :

$$\begin{aligned} \delta_x &= \delta_y = \delta_z = \delta_0 \\ \delta_{xy} &= \delta_{yz} = \delta_{zx} = 0. \end{aligned}$$

PREMIÈRE PARTIE

I. — Étude mathématique de la distribution des contraintes résiduelles.

Dans ce chapitre nous nous proposons d'établir et d'étudier les équations mathématiques qui régissent le problème de la distribution des contraintes résiduelles pour une pièce de forme quelconque. Il s'agit de contraintes provoquées par une variation de volume spécifique isotrope, non homogène, en tous les points de la pièce.

Les équations auxquelles obéissent ces contraintes se groupent en trois catégories :

- les équations d'équilibre,
- les équations de compatibilité,
- les conditions aux limites.

En général, nous ne savons pas résoudre ce système d'équations. La solution mathématique impose en effet que la pièce ait un contour géométrique simple et une variation de volume spécifique en fonction de l'espace, aisément formulable. Nous étudierons cependant quelques cas particuliers (poutre et cylindre infiniment longs, disque infiniment plat).

Le calcul sera alors conduit dans le but de créer une méthode de résolution par analogie. Il faudra pour cela déterminer le rôle du coefficient de Poisson ν et du module d'Young E qui interviennent dans les équations. Ces coefficients variables lorsque l'on passe d'une matière à une autre particularise chaque problème de distribution de contraintes. Nous verrons cependant que moyennant certaines hypothèses une méthode d'analogie est possible. Le cas particulier important où l'origine des contraintes est due à un phénomène de diffusion sera étudié.

On distinguera dans cette étude deux grandes parties :

Le problème plan ; le problème tridimensionnel.

Le problème plan. — On considère en élasticité classique sous le nom de problème plan deux catégories de problèmes qui présentent des analogies au point de vue des inconnues et des équations qui les fournissent.

Ces problèmes constituent l'état plan de tension et l'état plan de déformation. Dans l'état plan de tension, l'état de contrainte réalisé est tel que les contraintes normales au plan du disque sont nulles. L'état plan de déformation se présente au contraire quand tous les déplacements se produisent parallèlement à un même plan.

On démontre, cf. (5), qu'il est impossible, sauf cas tout à fait exceptionnel, d'obtenir à la fois des contraintes et des déformations planes.

Pour l'étude du problème plan des contraintes résiduelles de dilatation on reprendra la même classification.

Des modifications apparaissent cependant dans la définition des deux problèmes par suite des termes supplémentaires introduits dans les équations de Hooke. Par exemple, dans le cas du problème des déformations planes on supposera une des extensions constante, alors qu'en élasticité classique, il suffisait d'admettre une des extensions nulle.

On précisera ces modifications dans chaque cas.

PROBLÈME DES DÉFORMATIONS PLANES. — Soit un cylindre de section quelconque dans le plan x, y et infiniment long dans la direction des z . Après traitement, les extensions e_x, e_y ne dépendent que des coordonnées x et y alors que l'extension e_z dirigée suivant l'axe des z est constante en tous les points du cylindre. Les contraintes ne dépendent, elles aussi, que de deux variables, la contrainte τ_z normale au plan xy n'étant pas nulle.

Les relations entre les contraintes et les extensions sont données par les relations suivantes où toutes les grandeurs ne sont fonction que de x et de y :

$$(2) \quad \begin{cases} Ee_x = \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) + E\delta_0 \\ Ee_y = \sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) + E\delta_0 \\ Ee_z = \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) + E\delta_0 \end{cases} \quad e_z = C^{te}$$

De l'étude des composantes du déplacement on déduit immédiatement que les glissements γ_{xz}, γ_{yz} sont nuls, donc :

$$(3) \quad \begin{cases} G\gamma_{xy} = \tau_{xy} \\ \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \end{cases}$$

Les systèmes (2) et (3) vont permettre d'établir les équations auxquelles obéissent les contraintes résiduelles dans un problème de déformation plane.

Équations d'équilibre. — Ces équations traduisent le fait qu'en un point quelconque les contraintes s'équilibrent. En négligeant les forces massiques on a, étant données les équations (3) et les contraintes ne dépendant pas de z :

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \sigma_z = \sigma_z(x, y).$$

Conditions aux limites. — Sur le contour les contraintes de la pièce doivent équilibrer les forces extérieures qui y sont appliquées.

Soit $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ les composantes des forces appliquées par unité de surface et l , m , n les cosinus directeurs de la normale à la surface. En remarquant que la composante de la normale suivant l'axe des z est nulle, $n=0$, on a :

$$\begin{cases} \bar{X} = l\sigma_x + m\tau_{xy} \\ \bar{Y} = l\tau_{xy} + m\sigma_y \\ \bar{Z} = 0. \end{cases}$$

Équation de compatibilité. — La condition de compatibilité traduit l'existence d'une déformation continue. Elle s'écrit en fonction des extensions.

$$(5) \quad \frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Cette condition, si l'on tient compte des équations (2), (3) et (4), peut se mettre sous la forme suivante où seules les contraintes interviennent :

$$(6) \quad \Delta(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{E}{1-\nu} \Delta \delta_0.$$

En résumé nous pouvons écrire que les équations qui régissent la distribution des contraintes résiduelles pour un problème de déformation plane sont les suivantes :

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{X} = l\sigma_x + m\tau_{xy} \\ \bar{Y} = l\tau_{xy} + m\sigma_y \end{cases} \quad \Delta(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{E}{1-\nu} \Delta \delta_0.$$

Ces équations apparaissent comme une extension des équations classiques de l'élasticité. Rappelons ces équations lorsque les forces massiques sont négligeables :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{X} = l\sigma_x + m\tau_{xy} \\ \bar{Y} = l\tau_{xy} + m\sigma_y \end{cases} \quad \Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0.$$

L'équation de compatibilité qui est ici une équation laplacienne est devenue, du fait de la dilatation δ_0 provoquée en chaque point, une équation de Poisson. On remarque de plus, par suite de la présence du module d'Young et du coefficient de Poisson, que la nature de la matière considérée intervient.

Avant d'étudier ces équations nous allons établir celles qui leur correspondent dans le cas des contraintes planes.

Remarque. — Dans le problème des déformations planes, nous avons supposé e_z constant. On peut montrer que si e_z , sans être cons-

tant, est seulement fonction de x et y , le problème est résolu par le même ensemble d'équations (problème bidimensionnel).

PROBLÈME DES CONTRAINTES PLANES. — Soit un disque où en un point M quelconque de coordonnées x, y , se produit une variation de volume spécifique $\delta_0(x, y)$. Si cette variation n'est pas égale en tous les points de la pièce il y a apparition de contraintes. Le disque étant infiniment mince les contraintes σ_z normales à son plan sont négligeables.

Les équations de base sont les suivantes :

$$(7) \quad \left| \begin{array}{l} Ee_x = \sigma_x - \nu\sigma_y + E\delta_0 \\ Ee_y = \sigma_y - \nu\sigma_x + E\delta_0 \\ Ee_z = -\nu(\sigma_x + \sigma_y) + E\delta_0 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} G\gamma_{xy} = \tau_{xy} \\ \tau_{xz} = 0 \\ \tau_{yz} = 0. \end{array} \right|$$

Les équations qui régissent le problème sont du même type que précédemment. Les équations d'équilibre et les conditions aux limites se formulent de la même façon. Seule l'équation de compatibilité est modifiée car les équations de base (7) sont différentes. Elle devient :

$$(8) \quad \Delta(\sigma_x + \sigma_y) = -E\Delta\delta_0.$$

Les deux systèmes qui régissent le problème plan diffèrent donc par l'équation de compatibilité. Pour avoir une écriture unique de ces deux systèmes nous poserons :

$$(9) \quad \Delta(\sigma_x + \sigma_y) = M\Delta\delta_0$$

en convenant que $M = -E$ dans le cas des contraintes planes et $M = -\frac{E}{1-\nu}$ dans le cas des déformations planes. Le coefficient M ne dépend que des caractéristiques mécaniques de la matière.

Les équations donnant la distribution des contraintes résiduelles pour un problème plan s'écrivent :

$$(II) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} \bar{X} = l\sigma_x + m\tau_{xy} \\ \bar{Y} = l\tau_{xy} + m\sigma_y \end{array} \right| \quad \Delta(\sigma_x + \sigma_y) = M\Delta\delta_0.$$

C'est ce système (II) d'équations que nous allons maintenant étudier.

ÉTUDE DU GROUPE D'ÉQUATIONS (II). — Dans ces équations interviennent le coefficient M caractéristique de la matière, et la fonction $\delta_0(x, y)$ caractéristique du traitement imposé à la pièce. Pour un traitement donné la distribution des contraintes résiduelles dépend de la nature du métal.

La méthode d'analogie simple qui est fondée sur l'identité des équations différentielles régissant la distribution des contraintes dans une pièce n'est donc pas ici applicable.

Nous allons faire l'étude du système (II) en portant notre attention sur l'équation de compatibilité. Nous étudierons les points suivants :

- 1) le cas particulier où $\Delta\delta_0 = 0$;
- 2) le cas général où $\Delta\delta_0 \neq 0$;
- 3) le cas où δ_0 obéit à une loi de Fourier.

Cas particulier $\Delta\delta_0 = 0$. — Le système (II) se réduit aux équations classiques de l'élasticité plane donnant la distribution des contraintes dans une pièce exempte de tensions résiduelles. Nous savons que ce système d'équations admet une solution unique que l'on peut atteindre par exemple par l'emploi de la photoélasticité.

Remarquons cependant que la fonction δ_0 qui représente la dilatation provoquée n'est pas obligatoirement nulle en tous points de la pièce. Il suffit que cette fonction soit harmonique pour qu'elle ne crée pas de contraintes dans une pièce qui doit être cependant simplement connexe.

Physiquement ces conditions correspondent à un régime stationnaire ($\Delta\delta_0 = 0$) s'établissant dans un modèle libre de se déformer (modèle simplement connexe). Prenons par exemple le cas d'une variation de température, la dilatation provoquée en chaque point lui est proportionnelle :

$$\delta_0(x, y) = \alpha T(x, y).$$

α : coefficient de dilatation de la matière ;

$T(x, y)$: variation de température.

Comme la température obéit à une loi de Fourier, en régime permanent on a $\Delta T = 0$ et par suite : $\Delta\delta_0 = 0$ et nous n'aurons pas de contraintes dans la pièce si celle-ci est libre de se déformer. Ce raisonnement suppose cependant que la matière a des caractéristiques mécaniques (module d'Young, coefficient de Poisson) indépendantes de la température.

Si l'on considère par contre un anneau, corps doublement connexe, il y a, en régime permanent, apparition de contraintes. Le corps n'est en effet pas libre, par suite de sa géométrie, de se déformer arbitrairement (cf. 12).

Cas général $\Delta\delta_0 \neq 0$. — Les possibilités de résoudre mathématiquement le groupe d'équations (II) sont assez restreintes. La résolution de quelques cas simples sera cependant faite. La solution mathématique de ces quelques exemples servira au contrôle des expériences que nous ferons par la suite.

L'étude du système d'équations (II) sera conduite de manière à rechercher si une méthode d'analogie peut être développée, c'est-à-dire si la solution d'un problème peut être étendue à une matière différente et à un mode de création différent des contraintes résiduelles. On étu-

diera pour cela le rôle du coefficient M caractéristique de la matière et de la fonction δ_0 qui particularise le traitement.

Unicité de la solution. — Démontrons que pour une fonction $\delta_0(x, y)$ donnée le système d'équations (II) ne peut admettre qu'une solution.

Physiquement cela signifie que, pour un traitement déterminé qui impose une certaine variation de volume spécifique en chaque point, il ne peut s'établir dans la pièce qu'une seule distribution de contraintes.

Supposons, pour faire cette démonstration, qu'il existe deux systèmes de solutions $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ et $\sigma'_x, \sigma'_y, \tau'_{xy}$ au groupe d'équations (II).

Il en résulte par différence que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\sigma_x - \sigma'_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xy} - \tau'_{xy})}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial(\tau_{xy} - \tau'_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_y - \sigma'_y)}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} l(\sigma_x - \sigma'_x) + m(\tau_{xy} - \tau'_{xy}) = 0 \\ l(\tau_{xy} - \tau'_{xy}) + m(\sigma_y - \sigma'_y) = 0 \end{array} \right.$$

$$\Delta[(\sigma_x - \sigma'_x) + (\sigma_y - \sigma'_y)] = 0.$$

Ces équations donnent la distribution des contraintes pour un corps exempt de tensions résiduelles et ne subissant aucune force extérieure. Il n'y a pas de déformation et la tension est nulle en un point quelconque du corps. On a donc :

$$\sigma_x - \sigma'_x = 0 \quad \sigma_y - \sigma'_y = 0 \quad \tau_{xy} - \tau'_{xy} = 0.$$

La solution du système (II), qui physiquement existe, est donc unique.

Simplification des équations (II). — Dans le but de simplifier le groupe d'équations (II) montrons que le tenseur contrainte, solution de ces équations, peut être considéré comme la somme de deux tenseurs particuliers.

Le premier sera solution d'un système du type (II) mais dans lequel les forces appliquées par unité de surface sont nulles. Soit $\sigma'_x, \sigma'_y, \tau'_{xy}$, la solution de ce système.

Le second de ces tenseurs sera aussi solution du même système (II) mais où l'on suppose la fonction δ_0 identiquement nulle. Soit $\sigma''_x, \sigma''_y, \tau''_{xy}$, la solution de ce second système.

Il est évident, les équations étant toutes linéaires, que le tenseur $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \sigma'_x + \sigma''_x \\ \sigma_y = \sigma'_y + \sigma''_y \\ \tau_{xy} = \tau'_{xy} + \tau''_{xy} \end{array} \right.$$

est solution du groupe d'équations différentielles (II).

Il est possible par l'emploi de la méthode photoélastique d'atteindre la solution $\sigma''_x, \sigma''_y, \tau''_{xy}$. La résolution du système (II) est donc ramenée à la détermination de $\sigma'_x, \sigma'_y, \tau'_{xy}$.

Le raisonnement suppose cependant la pièce peu déformable afin que les solutions que l'on détermine s'appliquent bien au même corps et non à des pièces de contours différents.

En supposant cette hypothèse vérifiée l'étude du système (II) se réduit à celle du système (III), c'est-à-dire à la connaissance de la distribution des contraintes résiduelles, dans une pièce libre de toute action extérieure.

Le système que l'on va maintenant étudier sera donc :

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} l\sigma_x + m\tau_{xy} = 0 \\ l\tau_{xy} + m\sigma_y = 0 \end{array} \right. \quad \Delta(\sigma_x + \sigma_y) = M\Delta\delta_0.$$

Rôle du coefficient M. — Ce facteur dépend des constantes mécaniques de la pièce.

Pour étudier son influence considérons deux pièces de formes identiques auxquelles on applique des traitements qui tout en étant différents sont supposés aboutir à la même répartition des δ_0 .

Dans la première pièce, de caractéristique M, s'établissent des contraintes $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$.

Dans la seconde pièce de caractéristique M', s'établissent les contraintes $\sigma'_x, \sigma'_y, \tau'_{xy}$.

Il est facile de constater, étant donné l'unicité de la solution, que :

$$(10) \quad \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\sigma'_x}{\sigma'_y} = \frac{\tau_{xy}}{\tau'_{xy}} = \frac{M}{M'}.$$

Le fait de modifier le coefficient M caractéristique de la substance, ne change que l'intensité des contraintes et non leur répartition. Les pièces ont les mêmes isostatiques.

Ce résultat donne une première méthode pour l'étude du groupe d'équations (III). Si dans deux pièces de matières différentes, mais de formes identiques, nous savons développer la même variation de volume spécifique $\delta_0(x, y)$, les contraintes résiduelles qui apparaissent ont même répartition.

Rôle de la fonction $\delta_0(x, y)$. — Cette fonction représente la variation du volume spécifique en fonction de l'espace, provoquée par le traitement. Elle intervient dans les équations (III) par son laplacien.

Par un raisonnement analogue à celui fait plus haut on peut montrer que, si le laplacien est modifié linéairement, c'est-à-dire devient de la forme :

$$(11) \quad \Delta\delta'_0 = \alpha\Delta\delta_0 \quad \alpha : \text{constante},$$

les contraintes conservent toujours la même répartition. Résumons le rôle de δ_0 et de M en considérant les distributions de contraintes qui s'établissent dans deux pièces de formes identiques.

Dans la première pièce, de coefficient mécanique M , on développe une variation de volume spécifique δ_0 . Soit σ_x , σ_y , τ_{xy} , les contraintes créées.

Dans une deuxième pièce, de coefficient mécanique M' , on développe une variation de volume spécifique δ'_0 respectant la condition (II). Soit σ'_x , σ'_y , τ'_{xy} les contraintes qui s'établissent dans cette pièce.

On démontre à l'aide d'un raisonnement analogue à celui fait précédemment que les contraintes ont même répartition et sont dans le rapport :

$$(12) \quad \frac{\sigma_x}{\sigma'_x} = \frac{\sigma_y}{\sigma'_y} = \frac{\tau_{xy}}{\tau'_{xy}} = \frac{M}{M'}.$$

C'est ce résultat que nous utiliserons pour l'étude des dilatations provoquées par une loi de diffusion.

Remarquons enfin que δ_0 intervient linéairement dans les équations différentielles du système (III).

Il sera donc possible, si cela est nécessaire pour résoudre le système (III) de décomposer δ_0 en une somme de fonctions plus simples à étudier.

Résolution dans quelques cas du système (III). — La résolution de de ces quelques problèmes nous permettra de faire un contrôle théorique des expériences que nous ferons par la suite.

Nous examinerons les cas suivants :

poutre infiniment mince;
anneau infiniment mince;
cylindre indéfini.

Poutre infiniment mince.

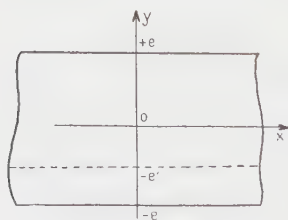


Fig. 1.

La poutre (fig. 1) d'épaisseur négligeable est indéfinie dans la direction des x et a pour largeur $2e$.

Le traitement que subit cette poutre, est tel qu'il développe une dilatation $\delta_0(y)$ indépendante de x en chaque point. Les contraintes qui apparaissent ne sont fonction que de y . Soit :

$$\sigma_x(y), \sigma_y(y), \tau_{xy}(y).$$

La résolution du système (III) donne dans ce cas :

$$(13) \quad \sigma_x(y) = -E\delta_0(y) + \alpha y + \beta.$$

Les constantes α et β sont déterminées en remarquant que la pièce est en équilibre. La contrainte $\sigma_x(y)$ vérifie donc :

$$(14) \quad \int_{-e}^{+e} \sigma_x(y) dy = 0 \quad \int_{-e}^{+e} \sigma_x(y) \cdot y dy = 0$$

ce qui donne pour α et β :

$$(15) \quad \alpha = \frac{3E}{2e^3} \int_{-e}^{+e} \delta_0(y) y dy \quad \beta = \frac{E}{2e} \int_{-e}^{+e} \delta_0(y) dy.$$

Dans le cas particulier où la fonction $\delta_0(y)$ admet l'axe ox comme axe de symétrie α la constante, est nulle :

$$(16) \quad \sigma_x(y) = -E\delta_0(y) + \beta.$$

Anneau infiniment mince.

Soit un anneau d'épaisseur négligeable, de rayon extérieur a et de rayon intérieur b (fig. 2).

Imposons à cet anneau un traitement qui respecte la symétrie. La dilatation $\delta_0(r)$ ainsi développée ne sera fonction que du rayon r . Il en sera de même des contraintes radiales, tangentielles et de cisaillements :

$$\sigma_r(r), \quad \sigma_\theta(r), \quad \tau_{r\theta}(r).$$

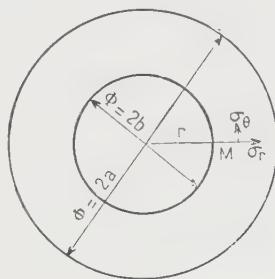


Fig. 2.

La résolution du système (III) en coordonnées cylindriques conduit en introduisant la fonction $\Phi(r)$ telle que :

$$\sigma_r = \frac{\Phi}{r} \quad \sigma_\theta = \frac{d\Phi}{dr}$$

à la résolution de l'équation :

$$(17) \quad \frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} - \frac{1}{r^2} \Phi = -E \frac{d\delta_0}{dr}.$$

La solution de cette équation est de la forme :

$$\Phi = C_1 r + \frac{C_2}{r} + \varphi(r) \quad \text{avec} \quad \varphi(r) = -\frac{E}{r} \int_0^r \delta_0(r) r dr.$$

C_1, C_2 : constantes déterminées par les conditions aux limites $\sigma_r(a) = \sigma_r(b) = 0$.

Dans le cas du disque on trouve pour σ_r , étant donné que pour $b = 0$ la valeur de cette contrainte doit être finie :

$$(18) \quad \sigma_r = \frac{\varphi(r)}{r} - \frac{\varphi(a)}{a} \quad \sigma_\theta = \varphi'(r) - \frac{\varphi(a)}{a}.$$

Cylindre indéfini.

Il s'agit ici d'un problème de déformations planes. Soit un cylindre de rayon extérieur a et de rayon intérieur b . Supposons que le traitement développe des contraintes admettant l'axe du cylindre comme axe de symétrie.

Les contraintes $\sigma_r(r)$, $\sigma_\theta(r)$, ainsi que la dilatation $\delta_0(r)$ ne sont fonction que du rayon r .

Par un raisonnement analogue à celui déjà fait dans le cas de l'anneau infiniment plat on montre que $\tau_{r\theta} = 0$ et que la fonction $\Phi(r)$ obéit à l'équation :

$$(19) \quad \frac{d^2\Phi}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} - \frac{1}{r^2} \Phi = - \frac{E}{1-\nu} \frac{d\delta_0}{dr^2}.$$

Cette équation est comparable à l'équation (17). On remarque que dans ce problème de déformations planes intervient, à côté du module d'Young, le coefficient de Poisson.

Cas où la dilatation obéit à une loi de diffusion. — Nous allons étudier de façon plus particulière les distributions de contraintes résiduelles de dilatation créées par un phénomène de diffusion.

Soit une pièce à travers laquelle diffuse un corps. Faisons l'hypothèse que la variation de volume spécifique qui apparaît en chaque point varie linéairement avec la concentration du corps qui diffuse :

$$\delta_0 = K(c - a).$$

c : concentration du corps diffusant au point $P(x, y)$ et au temps t ,

a : concentration seuil du corps diffusant à partir de laquelle apparaît une dilatation,

K : constante.

La concentration du corps diffusant est une fonction de l'espace et du temps qui obéit à la loi de Fick :

$$D \cdot \Delta c = \frac{\partial c}{\partial t}.$$

D : coefficient de diffusion de la matière pour le corps diffusant considéré,

t : temps.

Les contraintes fonctions de x , y et t obéissent aux groupes d'équations suivants :

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} l\sigma_x + m\tau_{xy} = 0 \\ l\tau_{xy} + m\sigma_y = 0 \end{array} \right. \quad \Delta(\sigma_x + \sigma_y) = MK\Delta c$$

$$\Delta c = \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial c}{\partial t} \quad c = c_F \text{ sur le contour de la pièce.}$$

Dans ces équations nous avons considéré une condition au contour extrêmement simple. Le raisonnement qui va suivre est cependant généralisable à des conditions plus complexes.

Equations réduites de la distribution des contraintes. — La solution de l'équation de Fick peut être écrite en introduisant les variables réduites u et v :

$$u = \frac{x}{\sqrt{D}} \quad v = \frac{y}{\sqrt{D}}$$

La fonction solution apparaît alors comme indépendante du coefficient de diffusion de la matière.

Considérons à un instant t fixé, les contraintes qui se sont développées dans la pièce. Les variables u et v sont alors des fonctions d'espace et peuvent servir à exprimer les contraintes $\sigma_u(u, v)$, $\sigma_v(u, v)$, $\tau_{uv}(u, v)$ et la dilatation $\delta_0(u, v)$. On peut écrire le système (20) sous la forme :

$$(21) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_u}{\partial u} + \frac{\partial \tau_{uv}}{\partial v} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{uv}}{\partial u} + \frac{\partial \sigma_v}{\partial v} = 0 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} l\sigma_u + m\tau_{uv} = 0 \\ l\tau_{uv} + m\sigma_v = 0 \end{array} \right|$$

$$\Delta_{uv}(\sigma_u + \sigma_v) = MK\Delta_{uv}c(u, v, t).$$

Il représente en coordonnées réduites la distribution des contraintes dans un corps de coefficient de diffusion D à l'instant t et où la concentration imposée au contour est c_F .

Méthode d'analogie. — Considérons une autre pièce dans le système x' , y' ayant subi un phénomène de diffusion. La distribution des contraintes qui se développent dans ce corps, écrites à l'aide des équations réduites, prend la même forme que précédemment.

Seul est modifié le coefficient constant qui s'introduit dans l'équation de compatibilité.

Si les deux systèmes d'équations portent sur des pièces qui en coordonnées réduites ont les mêmes dimensions, on en déduit, étant donné ce qui a été établi précédemment, que les contraintes ont dans ces modèles mêmes répartitions :

Les répartitions de contraintes de deux pièces seront donc géométriquement semblables si on peut identifier leurs coordonnées réduites :

$$\frac{x}{\sqrt{D}} = \frac{x'}{\sqrt{D'}} \quad \frac{y}{\sqrt{D}} = \frac{y'}{\sqrt{D'}}.$$

Ce calcul nous conduit à caractériser un corps dans lequel se développe des contraintes de dilatation obéissant à une loi de diffusion par le nombre N et le temps t :

$$(22) \quad N = \frac{L}{\sqrt{D}}.$$

L est une longueur caractéristique du corps que l'on étudie,

D est le coefficient de diffusion qui régit la dilatation qui se développe en tous points du corps. Ce coefficient est homogène à $L^2 T^{-1}$,

t est le temps de diffusion.

Tous les corps homothétiques où les diffusions provoquées pendant un temps t sont telles que les nombres N soient égaux, auront des répartitions de contraintes géométriquement semblables.

De cette conclusion on déduit la méthode d'analogie suivante : l'étude de la répartition des contraintes d'une pièce 1, de coefficient D , ayant subi une diffusion pendant le temps t , peut être déterminée à partir de la répartition des contraintes d'un corps 2, de coefficient D' , ayant subi une diffusion pendant le temps t' , mais dont les dimensions géométriques sont $\sqrt{\frac{D'}{D}}$ fois celles de la pièce 1 :

$$x' = \sqrt{\frac{D'}{D}} \cdot x \quad y' = \sqrt{\frac{D'}{D}} \cdot y.$$

Cette méthode générale peut être simplifiée si l'on étudie une diffusion dans un corps illimité ou, ce qui revient au même, une diffusion qui pénètre très peu dans la pièce. Dans ce cas, la diffusion est caractérisée par le nombre N sans dimensions,

$$N = \frac{L}{\sqrt{Dt}}.$$

C'est pratiquement ce critère que nous appliquerons par la suite. Les pièces devront alors être dans le rapport de similitude $\sqrt{\frac{D't'}{Dt}}$ (t' étant le temps de diffusion de la pièce de coefficient D'). Cette méthode impose cependant une condition au contour unique.

La méthode d'analogie, que nous venons d'exposer, est possible moyennant certaines hypothèses que nous rappelons ici.

a) La dilatation varie linéairement avec la concentration du corps qui diffuse.

b) La diffusion suit la loi de Fick.

Ces deux hypothèses entraînent que la dilatation que l'on développe en chaque point obéit à une loi de Fourier.

c) La concentration c_F , imposée au contour, reste identique à elle-même en tous les points de ce contour dans le cas de la méthode simplifiée.

d) Les caractéristiques mécaniques de la pièce (Module d'Young, coefficient de Poisson) restent constantes.

e) La méthode est de plus limitée par le fait que le rapport de simi-

litude des pièces ne peut être quelconque. Il est techniquement utile d'avoir :

$$\frac{1}{10} < \sqrt{\frac{D'\ell'}{Dt}} < 10.$$

On ne peut en effet comparer un choc thermique, dans un acier où D le coefficient de diffusion est de l'ordre de $10^{-1} \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$ et le temps de l'ordre de quelques secondes, à une diffusion d'atomes de carbone où $D' = 10^{-7} \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$ et où les temps de diffusion ℓ' sont de l'ordre d'une dizaine d'heures :

$$Dt = 10^{-1} \times 1 = 10^{-1} \text{ cm}^2, \quad D'\ell' = 10^{-7} \times 10 \times 3600 = 36 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2.$$

Il faudra donc, pour utiliser cette méthode d'analogie, disposer de modèles dont les coefficients de diffusion et les temps de diffusion soient dans un rapport tel, avec ceux de la pièce que l'on veut étudier, que les dimensions du modèle expérimental soient acceptables.

CONCLUSION A L'ÉTUDE DU PROBLÈME PLAN. — L'étude des contraintes résiduelles créées par dilatation dans une pièce nous a permis de démontrer les points suivants :

1) La distribution des contraintes d'une pièce dépend du module d'Young et dans le cas des déformations planes du coefficient de Poisson. Ces coefficients affectent l'intensité des contraintes et non leur répartition. L'intensité de ces contraintes augmente avec E et ν .

2) Si on sait reproduire dans une pièce de matière quelconque la variation de volume spécifique δ_0 qui a été développée dans une pièce donnée, et ceci à un coefficient de proportionnalité près et même à une fonction harmonique près, les contraintes résiduelles des deux pièces ont même répartition.

3) Dans le cas où δ_0 a pour origine un phénomène de diffusion caractérisé par D le coefficient de diffusion et t le temps de diffusion, une méthode d'analogie simple peut être développée. Elle consiste à étudier généralement la répartition des contraintes dans une pièce où la diffusion est caractérisée par D' et ℓ' et dont les dimensions sont $\sqrt{\frac{D'\ell'}{Dt}}$ fois celles du modèle à étudier initialement.

Nous chercherons dans un prochain chapitre le moyen de développer des contraintes résiduelles dont il soit facile de déterminer la distribution.

Problème tridimensionnel. — Le problème tridimensionnel de la distribution des contraintes résiduelles de dilatation dans une pièce fait intervenir des raisonnements analogues à ceux précédemment étudiés. Nous ne signalerons que les conclusions auxquelles ils conduisent.

EQUATIONS DE LA DISTRIBUTION DES CONTRAINTES. — A côté des équations d'équilibre et des conditions aux limites qui s'écrivent comme en élasticité classique, les conditions de compatibilité qui sont ici au nombre de six, sont de la forme :

$$(1 + \nu)\Delta\sigma_z + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = -E\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\Delta\delta_0 + \frac{\partial^2\epsilon_0}{\partial z^2}\right),$$

$$(1 + \nu)\Delta\tau_{yz} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z} = -E\frac{\partial^2\epsilon_0}{\partial y\partial z} \quad \theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

(Les autres équations se déduisant par permutation circulaire).

La distribution des contraintes résiduelles dans un problème tridimensionnel est donc régie par douze équations. Dans ces équations interviennent à côté de la fonction $\delta_0(x, y, z)$ le module d'Young et le coefficient de Poisson.

ÉTUDE DE CES ÉQUATIONS. — De la même façon que dans le cas du problème plan on démontre :

— que si la dilatation $\delta_0(x, y, z)$ est une fonction linéaire de l'espace les contraintes créées par cette dilatation sont nulles ;

— que la solution des douze équations est unique (On suppose ici encore que l'état initial de la matière est sans déformation ni contrainte) ;

— qu'une méthode d'analogie est possible. Que l'on considère en effet deux pièces de formes identiques, mais de substances différentes, dont les modules d'Young sont E_1 et E_2 . On fait les deux hypothèses suivantes :

— les matières considérées ont même coefficient de Poisson ;

— les dilatations qui apparaissent dans les pièces et que l'on désigne par δ_0^1 et δ_0^2 ne sont pas indépendantes mais liées par la relation :

$$\Delta\delta_0^2 = \alpha\Delta\delta_0^1 \quad \alpha : \text{constante.}$$

Il en résulte que les deux pièces ont les mêmes isostatiques et que les contraintes sont dans le rapport :

$$\frac{\sigma_z^1}{\sigma_z^2} = \frac{\sigma_x^1}{\sigma_x^2} = \frac{\sigma_y^1}{\sigma_y^2} = \frac{\tau_{xy}^1}{\tau_{xy}^2} = \frac{\tau_{yz}^1}{\tau_{yz}^2} = \frac{\tau_{zx}^1}{\tau_{zx}^2} = \frac{E_1}{\alpha E_2}.$$

$\sigma_x^1 \dots$ contraintes dans la première pièce.

$\sigma_x^2 \dots$ contraintes dans la seconde pièce.

Dans le cas où l'origine des contraintes est un phénomène de diffusion obéissant à la loi de Fick, les équations donnant la distribution des contraintes dans la pièce peuvent être écrites sous forme réduite.

Comme dans le problème plan on démontrera qu'une méthode d'analogie est possible.

CONCLUSION. — L'étude des distributions de contraintes résiduelles tridimensionnelles conduit à des résultats analogues à ceux du pro-

blème plan. Cependant une difficulté supplémentaire s'introduit ici. Nous sommes obligés de supposer l'invariance du coefficient de Poisson lorsque l'on passe d'une matière à une autre. Il est normal que l'on retrouve ici cette difficulté qui se présente déjà dans la théorie usuelle du figeage.

DEUXIÈME PARTIE

Détermination expérimentale de la distribution des contraintes résiduelles.

L'étude mathématique des équations donnant la distribution des contraintes résiduelles de dilatation d'une pièce a permis d'établir qu'une méthode de détermination analogique est possible, moyennant certaines hypothèses. Cette méthode demande, pour être utilisée, que l'on puisse atteindre expérimentalement la distribution des contraintes résiduelles d'un modèle. Cette distribution servira de base de départ à l'application de la méthode d'analogie.

Pour déterminer cette distribution nous utiliserons la biréfringence accidentelle qui apparaît dans les matériaux photoélastiques. La théorie de la photoélasticité permet en effet de relier la biréfringence à la distribution des extensions qui se développent dans la pièce. Mais ces extensions et les contraintes qui en résultent sont habituellement développées par des forces extérieures. Comme nous voulons déterminer des distributions de contraintes résiduelles, nous étudierons une méthode photoélastique un peu particulière. Nous chercherons la liaison entre la biréfringence résiduelle et les extensions résiduelles de la pièce. Il est évident que les lois de base de la photoélasticité restent valables. Nous chercherons à préciser dans quelles conditions la biréfringence résiduelle est l'image fidèle des contraintes résiduelles de la pièce.

Nous étudierons les points suivants :

- création de biréfringence résiduelle ;
- liaison entre la biréfringence et les contraintes résiduelles ;
- contrôle expérimental de cette liaison dans différentes matières photoélastiques.

Remarquons que d'autres méthodes expérimentales pourraient être utilisées pour résoudre le système d'équations (III). Cependant aucune méthode n'apparaît aussi bien adaptée que la méthode photoélastique. C'est pourquoi nous avons essayé de l'adapter au problème de la distribution des contraintes résiduelles.

Développement de biréfringence résiduelle. Étude des mécanismes. —

Nous savons qu'il existe parfois dans les pièces photoélastiques une biréfringence alors que la pièce n'est soumise à aucun effet extérieur. Cette biréfringence, que nous appellerons résiduelle, peut avoir de nombreuses origines et n'est pas forcément le signe de contraintes existant dans la pièce.

Nous cherchons à développer ici une biréfringence particulière ayant pour origine, de même que les contraintes que l'on veut étudier, une variation de volume spécifique développée de façon non homogène dans la pièce. Nous essayerons par contre d'éviter le développement de toute biréfringence dont l'origine soit évidemment différente. Par exemple : la biréfringence créée par une déformation plastique, celle qui accompagne le phénomène de figeage, celle qui suit la décharge d'une pièce (élasticité retardée).

La biréfringence, dont on peut penser qu'elle a pour origine une variation de volume spécifique, est celle que l'on connaît sous le nom général d'effet de bord.

Le phénomène consiste dans le fait que, pour certains matériaux, le contour libre d'une plaque se borde, au bout d'un certain temps, d'isochromes parfois nombreuses qui sont parallèles à ce contour. Ce phénomène, gênant en photoélasticité normale, a fait l'objet de nombreuses études et plusieurs mécanismes ont été proposés pour expliquer son apparition. On peut les résumer de la façon suivante :

a) Modification structurale du polymère.

b) Fixation ou perte de substance intervenant dans la composition du polymère.

Ces mécanismes, si on y ajoute le phénomène de trempe, sont comparables à ceux qui, en métallurgie, sont considérés comme étant la source des contraintes résiduelles dues à une variation de volume spécifique. Nous nous proposons d'étudier ces mécanismes et de vérifier par suite si les contraintes qu'ils engendrent correspondent bien aux hypothèses faites.

ÉTUDE DES MÉCANISMES DE DÉVELOPPEMENT. — Nous allons considérer l'aspect physicochimique de ces mécanismes.

Modification structurale du polymère. — Il s'agit d'une polymérisation ou d'une polycondensation qui se poursuit avec le temps dans les plaques exposées à la lumière. Cette modification dont on n'est pas maître, qui se produit par endroits dans la plaque photoélastique est inexploitable pour l'étude des contraintes résiduelles.

Fixation ou perte de substance. — Beaucoup plus contrôlable est la biréfringence créée par fixation ou perte de solvant. Dans le cas de l'absorption il s'agit d'un matériau qui, par sa composition, présente une affinité chimique pour divers solvants. Par exemple la vapeur

d'eau présente dans l'air peut être absorbée par la substance dont les bords se gonflent. Ce gonflement crée des contraintes de compression au bord qui s'équilibrent par des contraintes d'extension à cœur.

Que le gonflement entraîne une compression s'explique par le fait que la dilatation que l'on provoque est gênée par les couches sous-adjacentes. On est en présence d'une pièce qui se dilate mais dont les extrémités ne peuvent guère se déplacer.

Dans le cas d'une perte de substance le matériau est au contraire riche en un solvant et un équilibre s'établit entre la matière et l'atmosphère ambiante. Dans ce cas, une contrainte d'extension apparaît en surface, suivie au cœur d'une compression.

Ces échanges, perte ou fixation de substance, sont régis par les lois de la diffusion, et obéissent par suite, avec une précision plus ou moins grande, à la loi de Fick.

Des études portant sur la diffusion de molécules organiques dans les hauts polymères ont montré que cette diffusion est rarement fickienne (cf. 8).

Comme nous voulons étudier la biréfringence accompagnant un phénomène de diffusion obéissant à la loi de Fick, nous choisirons une molécule diffusante minérale, petite, n'altérant pas les propriétés de la matière et qui sera : soit l'eau, soit l'ammoniaque.

Trempe. — La trempe produit facilement une biréfringence résiduelle dans la plupart des matières photoélastiques. Le processus de l'apparition des contraintes a été expliqué et mis en évidence expérimentalement (cf. 1).

De l'étude de ces mécanismes nous déduisons que seuls les deux derniers peuvent être utilisés pour créer une biréfringence résiduelle. Nous préciserons leur condition d'emploi dans chaque cas particulier.

Liaison entre la biréfringence résiduelle et les contraintes résiduelles. — Les différents mécanismes que nous venons de décrire permettent de développer une biréfringence résiduelle dans les pièces photoélastiques. Cette biréfringence, par l'emploi des lois de la photoélasticité, peut être traduite en terme de contraintes. Les contraintes ainsi calculées s'identifient-elles aux contraintes résiduelles qui apparaissent effectivement dans la pièce?

Dans ce paragraphe nous allons rechercher les expériences qui permettent de contrôler le sens physique des contraintes résiduelles calculées. Les expériences que nous décrirons seront appliquées par la suite aux différentes matières photoélastiques.

La liaison entre la biréfringence et les contraintes résiduelles sera faite en étudiant les points suivants :

— Rappel des lois auxquelles obéissent les contraintes résiduelles de dilatation ;

— Calcul des contraintes résiduelles par les lois de la photoélasticité ;

— Expériences permettant de contrôler si les contraintes résiduelles ainsi calculées obéissent bien aux lois énoncées.

LOIS DES CONTRAINTES RÉSIDUELLES DE DILATATION. — Les lois physiques auxquelles obéissent les contraintes résiduelles, et ceci quelle que soit leur origine, sont au nombre de deux. Ces deux lois traduisent simplement l'équilibre des contraintes dans la pièce. On doit donc avoir :

$$\sum \vec{\sigma} ds = 0$$

qui exprime que la résultante des contraintes pour un plan quelconque est nulle, et :

$$\sum \vec{\sigma}_A \vec{r} ds = 0$$

qui exprime que le moment des contraintes par rapport à un point quelconque doit être nul.

Nous voulons de plus que les contraintes résiduelles développées aient pour origine une dilatation. Le tenseur contrainte devra donc vérifier le système d'équations (III) établi au chapitre précédent.

Toute contrainte résiduelle calculée à partir de la biréfringence résiduelle d'une pièce devra, pour être utilisable, obéir à ces lois. Leur vérification est une condition nécessaire pour la signification physique des contraintes ainsi calculées.

CALCUL DES CONTRAINTES RÉSIDUELLES PAR PHOTOÉLASTICITÉ. — Avant de faire cette vérification, il est nécessaire d'étudier la loi de base de la photoélasticité.

Cette loi, dite de Maxwell-Neumann, exprime que le retard optique qui apparaît en un point est proportionnel soit à la différence des contraintes principales, c'est l'aspect de la loi dû à Maxwell, soit à la différence des extensions principales, et c'est l'aspect de la loi dû à Neumann. Cette loi s'exprime donc sous la forme :

$$(23) \quad k\lambda = Ca(p - q),$$

p, q : contraintes principales ;

$$(24) \quad k\lambda = C_1 a(e_1 - e_2),$$

e_1, e_2 : extensions principales ; a : épaisseur de la plaque et ces deux expressions sont en effet bien équivalentes dans le domaine classique de l'élasticité.

Dans le cas des contraintes résiduelles ces deux lois ne sont plus équivalentes. Nous allons montrer en effet que les deux coefficients C

et C_1 ne peuvent être constants simultanément. En effet, étant donné les relations qui lient les contraintes aux déformations :

$$\begin{cases} Ee_1 = p - \nu q + E\delta_1 \\ Ee_2 = q - \nu p + E\delta_2 \end{cases}$$

on trouve que :

$$C = \frac{1+\nu}{E} C_1 \left[1 + \frac{E}{1+\nu} \frac{\delta_1 - \delta_2}{p - q} \right].$$

Dans le cas le plus général $\delta_1 \neq \delta_2$ le rapport des coefficients C et C_1 est variable.

On est donc amené à conclure ou que l'étude des biréfringences résiduelles n'a aucune signification, ou, ce qui est une hypothèse plus fructueuse et que confirment de nombreux autres travaux, cf. (6), que ces deux lois ne sont pas équivalentes et que l'une d'elles doit être considérée comme la loi de base de la photoélasticité.

Le choix d'une loi de base de forme (23) est impossible à faire. Il est en effet facile de constater que si l'on admet une telle loi on doit trouver expérimentalement, pour une pièce n'évoluant pas au cours du temps, l'équilibre des contraintes. Or, de nombreuses expériences montrent qu'il n'en est pas toujours ainsi.

On est donc amené à admettre la proportionnalité entre la biréfringence et la différence des extensions principales. A l'aide de cette loi, on peut expliquer le déséquilibre apparent des contraintes résiduelles déterminées par photoélasticité.

Supposons en effet que le coefficient de Brewster soit modifié dans le rapport K au bord de la pièce, C étant sa valeur au centre.

Les contraintes deviennent au centre p_1 et q_1 car $k_1\lambda = Ce(p_1 - q_1)$. Au bord de la pièce au lieu de déterminer les contraintes p et q nous obtenons Kp et Kq car l'étude photoélastique suppose C constant :

$$k_2\lambda = KCe(p - q) = Ce(Kp - Kq).$$

Il est certain que les contraintes p_1, q_1 qui étaient équilibrées par p et q ne le seront pas par Kp et Kq .

Le non-équilibre des contraintes déterminées par photoélasticité peut ainsi être expliqué par la variation de C .

Si, par contre, il y a dans la pièce équilibre des contraintes montrons que cela entraîne que les contraintes résiduelles sont de dilatation et que les coefficients, E , ν , C_1 sont constants dans la plaque.

En effet, à cœur, loin de toute altération, on a $\delta_1 = \delta_2 = 0$ et par suite :

$$C = \frac{1+\nu}{E} \cdot C_1,$$

au bord de la pièce on a :

$$C = \frac{1+\nu}{E} \cdot C_1 + \frac{\delta_1 - \delta_2}{p - q} \cdot C_1.$$

Si donc C reste constant dans la pièce on conclut :

$$\delta_1 = \delta_2.$$

On pourrait aussi conclure que $\frac{1+\nu}{E}$ varie en sens inverse de $\frac{\delta_1 - \delta_2}{p - q}$. Cette conclusion valable mathématiquement est peu vraisemblable physiquement.

En conclusion on constate l'intérêt de vérifier l'équilibre des contraintes résiduelles déterminées par photoélasticité. Cet équilibre n'est pas une propriété commune à toutes les contraintes résiduelles. Seules des contraintes de dilatation vérifieront cette propriété.

VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE. — Si la vérification des équations d'équilibre est sans difficulté il n'en est pas de même du groupe d'équations (III).

En effet la méthode de contrôle la plus directe serait de connaître la fonction de dilatation $\delta_0(x, y)$ que l'on développe en tous points de la pièce et de calculer le tenseur contrainte qui en résulte. On comparerait ensuite le résultat de ce calcul au tenseur contrainte déterminé par photoélasticité.

Malheureusement il est très difficile de connaître, *a priori*, la fonction $\delta_0(x, y)$ que l'on va développer dans un corps. Nous ferons donc cette démonstration de façon indirecte. La méthode que l'on suivra et que l'on précisera pour chaque exemple, consistera à déterminer expérimentalement dans une pièce les contraintes et par application des équations (III) la fonction $\delta_0(x, y)$. On modifiera alors la forme de cette pièce par un usinage et l'on sera en présence d'une nouvelle pièce dont on connaît en tous points la fonction $\delta_0(x, y)$. On appliquera alors la méthode de vérification directe.

Comme mathématiquement on a pu donner une solution pour les poutres et les disques infiniment minces on expérimentera sur ces deux séries de modèles.

Poutre infiniment mince. — Considérons une poutre de base rectangulaire dont la longueur est grande vis-à-vis de l'épaisseur et de la largeur (fig. 3).

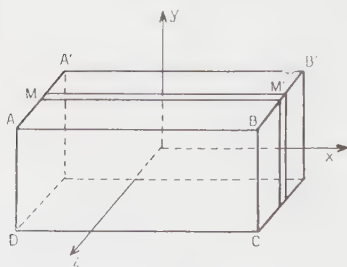


Fig. 3.

Supposons que par un phénomène de trempe ou de diffusion nous développons dans cette poutre une biréfringence. Les plans qui sont parallèles aux faces $ABCD$, $AA'B'B$ ne sont pas dans un même état de contrainte. Nous ramènerons ce problème à être un problème de photoélasticité

plane en découpant une poutre mince MM' matérialisant le plan médian. La distance MA doit être grande vis-à-vis de la perturbation superficielle qui a été provoquée par le phénomène de trempe ou de diffusion.

Cette poutre a une distribution de contraintes facilement calculable par la photoélasticité. La contrainte σ_y est en effet nulle partout. On a donc :

$$R(y) = Ca\sigma_x(y)$$

a : épaisseur de la plaque découpée ;

$R(y)$: retard optique au point d'ordonnée y ;

C : constante de Brewster.

Equilibre des contraintes.

On doit vérifier les deux équations d'équilibre.

La courbe expérimentale donnant le retard optique en fonction de y devra vérifier :

$$\int_{-e}^{+e} R(y) dy = 0$$

et d'autre part :

$$\int_{-e}^{+e} R(y)y(dy) = 0.$$

Remarquons que cette dernière vérification sera immédiate si la biréfringence développée admet l'axe des x comme axe de symétrie.

L'expérience de la poutre est la seule qui puisse permettre de vérifier l'équilibre des contraintes. En effet, l'une des contraintes étant nulle le retard optique donne directement la seconde contrainte. Dans tous les autres cas on est obligé de séparer les contraintes par les formules de Maxwell-Mesnager. Or ces formules supposent l'équilibre. Les contraintes que l'on détermine par l'emploi de ces formules seront forcément, à la précision des calculs près, en équilibre.

Vérification du système (III).

Dans le cas des poutres, les contraintes doivent vérifier l'équation (13) établie au chapitre précédent.

Si le traitement a respecté la symétrie de la pièce et si l'on suppose de plus que la dilatation provoquée est nulle à cœur on démontre que :

$$(25) \quad \delta_0(y) = \frac{1}{E} [\sigma_x(0) - \sigma_x(y)].$$

Pour démontrer que les contraintes obéissent bien à une équation de la forme (13) utilisons la méthode préconisée plus haut, car nous connaissons maintenant la fonction de dilatation $\delta_0(y)$ créée en chaque point.

Diminuons la largeur de la poutre par un usinage qui est supposé ne pas introduire de contrainte, ni altérer la fonction $\delta_0(y)$ (fig. 1). La lar-

geur passe de $2e$ à $e + e'$. La contrainte $\sigma'_x(y)$ est régie par une équation du même type que précédemment mais la fonction dilatation est ici connue :

$$\sigma'_x(y) = -E\delta_0(y) + \alpha'y + \beta'.$$

L'étude photoélastique de la poutre donne $R'(y)$ retard optique au point y d'où la contrainte $\sigma'_x(y)$ déterminée expérimentalement.

Mais comme on connaît $\delta_0(y)$ on peut aussi déterminer cette contrainte théoriquement. En effet, des équations d'équilibre on tire α' et β' :

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta'(e + e') + \frac{\alpha'}{2}(e^2 - e'^2) - E \int_{-e}^{+e} \delta_0(y) dy = 0 \\ \frac{\beta'}{2}(e^2 - e'^2) + \frac{\alpha'}{3}(e^3 + e'^3) - E \int_{-e}^{+e} \delta_0(y) y dy = 0. \end{array} \right.$$

Si nous avons un bon accord entre les résultats théoriques et expérimentaux dans le calcul de σ'_x , nous aurons là une confirmation du sens physique des contraintes résiduelles obtenues à partir de la biréfringence résiduelle.

Disque infiniment mince. — Une nouvelle confirmation de la signification physique des biréfringences résiduelles que l'on développe peut être obtenue en étudiant des disques infiniment minces.

Pour que ces biréfringences et par suite ces contraintes possèdent bien une symétrie axiale, les disques que nous étudierons ou bien seront extraits de cylindres infiniment longs ayant subi un phénomène de trempe ou de diffusion, ou bien auront eu leurs faces protégées au cours du traitement.

Équilibre des contraintes.

Les contraintes radiales et tangentielles σ_r , σ_θ sont les contraintes principales. Le retard optique $R(r)$ est une fonction du rayon r :

$$R(r) = Cd(\sigma_r - \sigma_\theta).$$

C : constante de Brewster ;

d : épaisseur du disque.

La séparation des contraintes $\sigma_r - \sigma_\theta$ se fera par formules de Maxwell-Mesnager. Ces contraintes vérifient, par suite de la méthode de calcul utilisée pour les déterminer, les conditions d'équilibre. A ce point de vue l'expérience du disque ne donne pas de renseignements intéressants.

Vérification du système (III).

Ces contraintes, si elles ont pour origine une dilatation isotrope, doivent être régies par l'équation (17). Les contraintes σ_r , σ_θ sont donc de la forme (18).

Connaissant par l'expérience σ_r et σ_θ nous pouvons en déduire la fonction dilatation $\delta_0(r)$.

Il est nécessaire de poser ici encore que la variation de volume spécifique provoquée à cœur est nulle.

On trouve :

$$(27) \quad \delta_0(r) = \frac{1}{E} [(\sigma_\theta(0) + \sigma_r(0)) - (\sigma_\theta(r) + \sigma_r(r))].$$

Connaissant la fonction $\delta_0(r)$ nous pouvons appliquer maintenant la méthode de vérification directe. Percons dans ce disque un trou de diamètre $2b$. Si cet usinage a été fait sans créer de contraintes et n'a pas modifié la fonction $\delta_0(r)$ développée dans la partie restante du disque, on peut calculer les nouvelles contraintes. C'est l'équation (17) qui régit cette nouvelle distribution de contraintes, avec de nouvelles conditions aux limites. Soit σ'_r et σ'_θ ces contraintes.

On aura :

$$(28) \quad \begin{cases} \sigma'_r = C_1 + \frac{C_2}{r^2} + \frac{\varphi(r)}{r} \\ \sigma'_\theta = C_1 - \frac{C_2}{r^2} + \varphi'(r). \end{cases}$$

On peut calculer les constantes C_1 et C_2 et par suite déterminer théoriquement ces contraintes en résolvant le système :

$$(29) \quad \sigma'_r(a) = \sigma'_r(b) = 0.$$

Par photoélasticité on peut déterminer expérimentalement σ'_r et σ'_θ . La concordance des résultats théoriques et expérimentaux confirmera la validité du sens physique des contraintes calculées à partir de la biréfringence résiduelle.

Conclusion. — Nous nous sommes proposé dans ce paragraphe de rechercher les expériences qui nous permettent de contrôler les points suivants :

La biréfringence résiduelle est-elle l'image des contraintes résiduelles d'une pièce ?

Les contraintes résiduelles développées ont-elles bien pour origine une dilatation ?

L'étude photoélastique nous a montré que l'on ne pouvait séparer ces deux aspects des contraintes résiduelles. Seules des contraintes de dilatation sont aisément interprétées par la photoélasticité. Les contraintes résiduelles de distorsion ont pour conséquence d'imposer une variation du coefficient de Brewster. L'équilibre des contraintes calculées par photoélasticité est une preuve que leur origine est due à une dilatation.

L'obéissance des contraintes calculées par photoélasticité aux groupes

d'équations (III) justifiera la signification physique de ces contraintes ainsi que les hypothèses faites au cours de ces calculs.

Ces expériences vont maintenant être réalisées sur différentes matières photoélastiques.

Étude des diverses matières photoélastiques. — Les différentes matières photoélastiques où l'on va développer des contraintes résiduelles en vue de contrôler leurs origines par la mise en œuvre des expériences précédemment décrites seront : la bakélite BT 61893, l'allite ou CR 39, l'araldite B, le plexiglas.

Le choix des trois premières matières résulte d'une étude rapide faite sur elles. Il nous a paru intéressant de comparer ces résultats à ceux obtenus en utilisant du plexiglas.

DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL. — Il est nécessaire de déterminer les isochromes et les isoclines qui se développent dans les maquettes. Nous utilisons pour cela un banc photoélastique normal.

Mais, pour nos expériences, où l'ordre d'interférence est très élevé au bord, le banc de photoélasticité dont le grossissement est faible, de l'ordre de deux, apparaît comme mal adapté. Pour connaître avec plus de précision l'ordre des isochromes et leur distribution au voisinage des bords, il a été utilisé un microscope polarisant. Une lunette donnait de la lumière parallèle qui, polarisée par un nicol, traversait perpendiculairement le modèle. À l'aide du microscope qui possédait un nicol analyseur nous mettions au point sur la face de la sortie du modèle. Les isochromes et les isoclines apparaissent alors peintes sur cette face. Ce microscope qui a un grossissement de 18,5 à 40, équipé d'un micromètre oculaire permet de connaître avec précision l'ordre des isochromes et leur répartition au voisinage des bords de la plaque. La source de lumière était au choix polychromatique ou monochromatique (raie verte du mercure $\lambda = 5461 \text{ \AA}$).

Enfin, pour déterminer les ordres faibles d'interférences (quelques centièmes de longueur d'onde) il a été utilisé soit un analyseur à pénombre, soit la méthode de Tardy.

Dans ces expériences où il faut déterminer des ordres d'isochromes aux bords des pièces, les conditions suivantes doivent être réalisées.

1) Les faces de la pièce doivent être orthogonales aux bords. Cette condition est réalisée par un usinage soigné et par le fait que l'on a évité de polir les faces.

2) Les rayons doivent être normaux aux faces de la lame. Pour déterminer l'importance de ce phénomène considérons les points suivants :

a) Supposons que les indices lents et rapides n'' et n' soient constants dans la lame. Le retard optique :

$$\delta = e(n'' - n')$$

devient si le rayon incident fait l'angle i :

$$\delta' = e(n'' \cos r'' - n' \cos r')$$

avec :

$$\sin i = n' \sin r' \quad \sin i = n'' \sin r''$$

d'où l'erreur :

$$\Delta = \delta' - \delta = \frac{ei^2}{2} \left(\frac{1}{n''} - \frac{1}{n'} \right).$$

Dans nos expériences nous avons :

$$n'' - n' < 0,01 \quad n'' \sim n' \sim 1,6.$$

Si on veut une différence de marche $\Delta\delta$ inférieure à un centième de longueur d'onde, il suffit de choisir i tel que :

$$i < \frac{1}{10} \text{ de radian.}$$

C'est là une condition facilement réalisable.

b) Dans nos expériences on ne peut admettre n' et n'' constants. La différence des deux indices varie dans le plan de la plaque car :

$$k\lambda = Ce(p - q) = e(n'' - n'),$$

e : épaisseur de la plaque,

p, q : contraintes principales.

Des expériences faites au microscope polarisant montrent que nous pouvons admettre que $n' - n''$ reste constant, dans les conditions les plus défavorables, sur 0,02 mm.

Pour éviter toute altération du retard optique sur le parcours on choisira un angle i tel que :

$$i < \frac{1}{100} \text{ de radian}$$

pour $e = 3$ mm. $n' \sim n'' = 1,6$.

Cette condition sera obtenue en faisant un réglage par autocollimation. Dans nos expériences on aura :

$$i < \frac{5}{1000} \text{ de radian.}$$

ESSAIS SUR LA BAKÉLITE BT 61893. — La matière photoélastique connue sous le nom de bakélite BT 61893 est une résine de condensation du type glyptal (condensation de l'anhydride phtalique et du glycérol). Cette résine qui est de couleur jaunâtre possède les coefficients caractéristiques suivants :

E module d'Young = 43 200 kg/cm⁻² ;

ν coefficient de Poisson = 0,36 ;

C coefficient de Brewster = 34 B.

Étude de la trempe. — Étudions, des poutres et des disques trempés. La trempe sera réalisée en immergeant dans un bac d'eau à température ambiante, des pièces préalablement chauffées. La température initiale est choisie de façon à développer les contraintes maxima. Cette température doit cependant être telle que :

- 1) au cours du chauffage il n'y a pas altération de la matière ;
- 2) pour les dimensions de la pièce et la vitesse de trempe utilisée aucune rupture à cœur n'apparaît.

Cas des poutres.

Un parallélépipède de bakélite de $100 \times 30 \times 30$ mm chauffé à 110°C , est refroidi par immersion dans l'eau à 20°C . Une poutre de 3 mm d'épaisseur, matérialisant le plan médian, est découpée par usinage. Il a été remarqué que, si la température initiale était choisie supérieure à 100°C , des ruptures à cœur lors de la trempe ou lors de l'usinage apparaissaient.

Figure 4 nous avons les isochromes développées dans la poutre. La distribution des isoclines nous permet d'écrire que, suivant l'axe des y , et dans une zone assez large autour de cet axe, les deux contraintes principales sont σ_x et σ_y avec :



Fig. 4. — Isochromes dans une poutre de bakélite trempée.

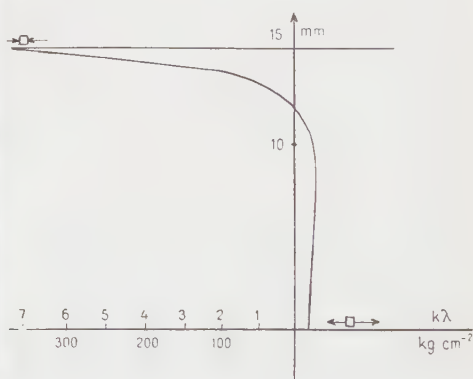


Fig. 5. — Contraintes dans une poutre de bakélite trempée.

$$\sigma_y = 0 \quad \text{et} \quad R(y) = C\alpha\sigma_x(y).$$

$R(y)$: retard optique au point d'ordonnée y ;

α : épaisseur de la plaque ;

C : constante de Brewster.

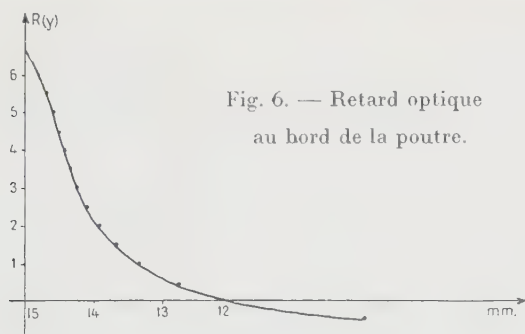
Figure 5 nous avons tracé la courbe $R(y)$ donnant le retard, en fraction de longueur d'onde, en fonction de l'ordonnée y .

Sachant que la bakélite a une constante photoélastique positive, c'est-à-dire que l'axe lent coïncide avec la plus grande des contraintes, il est facile de déterminer avec une lame dont l'axe lent a été repéré, les contraintes qui sont en compression ou extension le long de l'axe des ordonnées. On trouve ici, comme dans tous les phénomènes de trempe de la métallurgie, des contraintes de compression à bord, suivies à cœur d'une extension.

Équilibre des contraintes.

Si la constante de Brewster n'a pas été altérée par le traitement nous devons constater l'égalité des aires représentant, au coefficient Ca près, la résultante des contraintes en compression et en extension.

Dans le cas de l'expérience représentée (fig. 5) la détermination des isochromes a été faite à $2/100$ de longueur d'onde près. Au bord même de la pièce l'erreur est plus grande car elle résulte de l'interpolation de la courbe $R(y)$. Cette partie de la courbe (fig. 6) tracée au microscope



polarisant permet d'obtenir une précision absolue de l'ordre de $\pm 1/10$ de longueur d'onde. Cette erreur est obtenue par une répétition du tracé de la courbe $R(y)$ et l'on détermine la dispersion des mesures.

L'erreur due à l'usinage est ici négligeable. En effet l'usinage d'un bloc épais $100 \times 30 \times 30$ mm développe peu de contraintes et le découpage du plan médian se fait sans altérer les bords de la plaque. Un essai préalable montre que cet usage crée un retard optique de l'ordre du centième de longueur d'onde sur les bords de la plaque.

La résultante des contraintes en compression est proportionnelle à l'aire S qui calculée avec les unités de la figure 5 donne :

$$S_1 = 320 \pm 15 \text{ mm}^2$$

alors que la résultante des contraintes en extension est proportionnelle à :

$$S_2 = 310 \pm 20 \text{ mm}^2.$$

A la précision des mesures, qui est de 6/100, on peut affirmer l'égalité des aires et par suite l'invariance du coefficient de Brewster. On peut déterminer dans ce cas la résultante des contraintes en compression et en extension. On trouve étant donné que $a = 3 \text{ mm}$ et $C = 34B$: pour la résultante des contraintes en compression $R_1 = 9 \pm 0,4 \text{ kg}$ et pour la résultante des contraintes en extension $R_2 = 8,8 \pm 0,6 \text{ kg}$.

Dans ces conditions avec quelle précision peut-on affirmer que la dilatation provoquée est isotrope ? Pour faire ce calcul d'erreur nous admettons en première approximation deux coefficients de Brewster, l'un relatif à la partie comprimée, l'autre à la partie tendue. S'il y a variation d'une de ces valeurs vis-à-vis de l'autre elle ne peut être qu'inférieure à la précision de nos mesures. On trouve :

$$\frac{\Delta(\delta_1 - \delta_2)}{\delta_0} < \frac{\Delta C}{C} (1 + \nu) = \frac{10}{100}.$$

La dilatation est donc la même, à 1/10 près, dans toutes les directions.

Cette expérience a été répétée et l'on a constaté que l'équilibre n'est vérifié que si certaines conditions expérimentales sont respectées. Considérons le tableau suivant (p. 833) résumant nos essais.

Dans ces essais nous avons fait varier la position de la plaque d'étude par rapport aux faces de trempe ainsi que la dimension et la forme des éprouvettes. L'équilibre est vérifié quand la poutre est découpée suivant le plan médian du parallélépipède, il ne l'est plus quand cette plaque est voisine des forces de trempe. Enfin l'équilibre est vérifié de façon médiocre quand la plaque d'étude matérialise le plan méridien d'un cylindre trempé.

Figure 7, nous avons tracé la courbe donnant le retard optique en fonction de l'ordonnée y pour le plan médian du parallélépipède $100 \times 30 \times 13$.

Avant de conclure sur les expériences considérons le comportement de ces contraintes quand on diminue la largeur de la poutre.

Usinage de la poutre.

a) *Étude expérimentale.* — Considérons la plaque précédemment étudiée.

La largeur de la poutre qui était de 30 mm est ramenée par usinage à 19,8 mm :

$$2e = 30 \text{ mm} \quad e + e' = 19,8 \text{ mm}.$$

Le réseau d'isoclines permet d'écrire le long de l'axe des y et pour une zone entourant cet axe :

$$\sigma'_y = 0 \quad R'(y) = Ca\sigma'_x(y).$$

Figure 7 nous avons tracé la nouvelle répartition des contraintes le long de l'axe des y . La précision dans la mesure du retard optique est la même que précédemment, mais il faut tenir compte ici des contraintes créées par usinage. Un essai préalable nous a permis de chiffrer cette erreur dans des conditions d'usinage correctes. Pour une plaque de 3 mm d'épaisseur on a un retard optique de 1/10 à 2/10 de longueur d'onde le long du bord usiné.

Dimension et forme de la pièce trempée en millimètres	Température initiale et finale de trempé	Dimension et place de la pièce découpée pour l'étude photoélastique	Équilibre des contraintes en p. 100
100 × 30 × 30	110° à 20°	Plan $z = 0$ Plan médian 100 × 30 × 3	4/100
100 × 30 × 30	110° à 20°	Plan $z = 10$ 100 × 30 × 3	20/100
100 × 30 × 30	110° à 20°	Plan $z = 15$ 100 × 30 × 3	Pas de contrainte
100 × 30 × 13	95° à 17°	Plan médian 100 × 30 × 3	3/100
Cylindre = 29,5 $h = 100$	110° à 18°	Plan méridien 100 × 29,5 × 3	10/100

b) *Étude théorique.* — Figure 8 nous avons tracé la courbe $\delta_0(y)$. On trouve que la dilatation varie entre $8,6 \cdot 10^{-3}$ et zéro en prenant une valeur négative (compression) de $-0,2 \cdot 10^{-3}$.

La résolution du système (26) donne étant donné que :

$$A = E \int_{-e}^{+e} \delta_0(y) dy = 31 \text{ kg/cm}^{-1} \frac{dA}{A} = \frac{6}{100},$$

$$B = E \int_{-e}^{+e} \delta_0(y) y dy = 49,5 \text{ kg} \frac{dB}{B} = \frac{7}{100}.$$

$$\alpha' = 52 \text{ kg/cm}^{-3} \frac{d\alpha'}{\alpha'} = \frac{12}{100},$$

$$\beta' = -10,5 \text{ kg/cm}^{-2} \frac{d\beta'}{\beta'} = \frac{6}{200}.$$

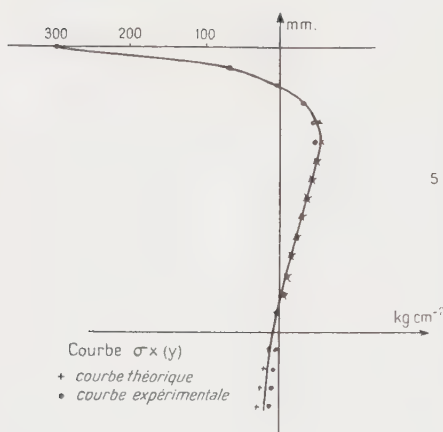


Fig. 7. — Contraintes, après usinage, dans une poutre de bakélite trempée.

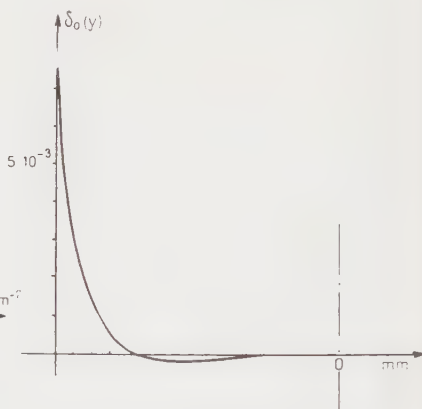


Fig. 8. — Dilatation provoquée par trempe dans une poutre de bakélite.

La contrainte qui s'établit dans la plaque est donc :

$$\sigma'_x(y) = -E\delta_0(y) + 52y - 10,5.$$

Figure 7 nous avons tracé cette courbe. La précision des calculs est faible puisqu'ils nous donnent les contraintes à environ 15-100 près. A une précision un peu supérieure on constate que les courbes théoriques et expérimentales se superposent.

Remarques. — 1) Pour faire cette série de calculs il est nécessaire de partir d'une courbe de biréfringence symétrique par rapport à l'axe des x . C'est en effet cette condition expérimentale qui nous permet d'atteindre, dans la poutre initiale, la fonction dilatation. A côté de cette condition expérimentale nous faisons de plus l'hypothèse que $\delta_0(y)$ est nulle au centre. Cette condition, qui dans certains cas de trempe peut être fautive, montre que la dilatation δ_0 que l'on atteint est purement relative à celle développée au cœur de la pièce.

2) Si la biréfringence n'est pas symétrique les calculs précédents ne sont plus valables. On peut cependant vérifier que la différence des contraintes avant et après usinage est, comme le veut la théorie, linéaire. C'est ce que l'on a vérifié sur l'exemple de la figure 9. Cette vérification qui est simple et beaucoup plus précise que les calculs théoriques précédents ne peut cependant les remplacer, elle n'est qu'une conséquence nécessaire de la théorie.

Étudions maintenant la répartition de contraintes de trempe dans les disques.

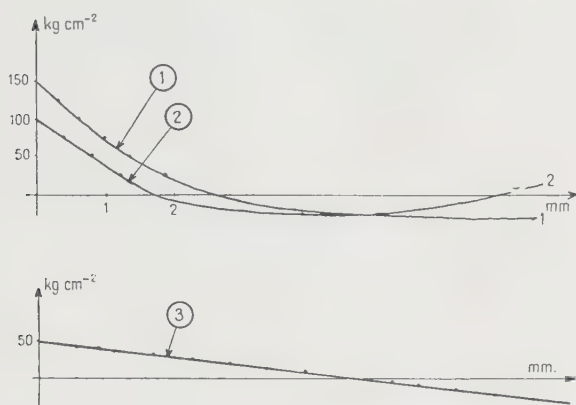


Fig. 9. — Contraintes dans une poutre de bakélite trempée.
1 Avant usinage 2 Après usinage 3 Différence des contraintes.

Cas des disques.

Un cylindre de bakélite, de diamètre $2a = 29,70$ mm et de hauteur $h = 33$ mm, chauffé à 98°C est refroidi par immersion dans l'eau à 13°C . Un disque de 3 mm d'épaisseur caractérisant le plan médian est découpé au tour. Il a été remarqué que si le saut de température lors de la trempe était supérieur à une centaine de degrés, des ruptures au cœur du cylindre apparaissaient. Elles se présentent sous la forme d'une petite bulle.

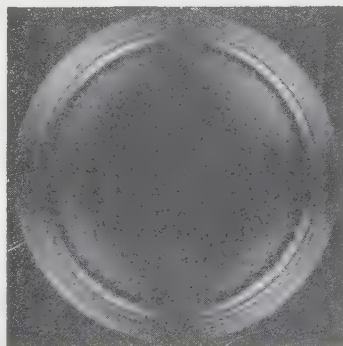
Etude photoélastique.

Figure 10 nous avons les isochromes et une position particulière des isoclines pour un tel disque.

==

Fig. 10. — Isochromes et isoclines
dans un disque de bakélite trempé.

==



Par les formules de Maxwell-Mesnager nous séparons les contraintes. Figure 11 nous avons représenté les contraintes radiales et tangentielles en fonction du rayon. La courbe $\delta_0(r)$ déduite de la formule (27) a été tracée figure 12.

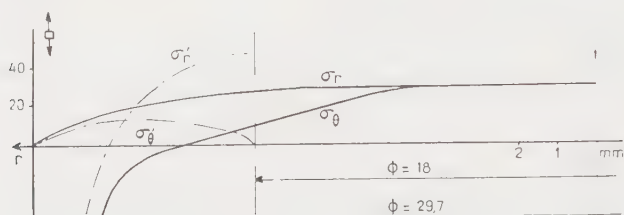


Fig. 11.

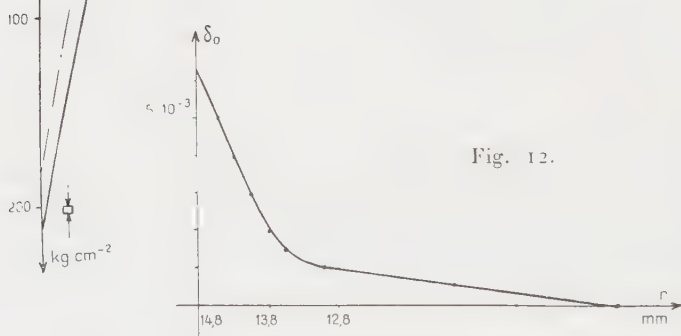


Fig. 12.

Fig. 11. — Contraintes dans un disque de bakélite trempé.

Fig. 12. — Dilatation provoquée par trempe dans un disque de bakélite.

L'erreur dans la mesure du retard optique est variable en fonction du rayon. Comme dans le cas de la poutre l'erreur absolue passe de $\pm 1/10$ au bord du disque à $\pm 1/100$ de longueur d'onde au cœur de la pièce. Cela entraîne une erreur absolue sur la contrainte qui varie de 10 à 3 kg/cm².

Usinage du disque.

Pour vérifier l'origine des contraintes, considérons leur comportement lors de l'alésage du disque.

a) *Calcul théorique.* — Le choix du diamètre d'alésage doit être tel qu'il provoque la variation maximum des contraintes dans l'anneau afin de permettre une bonne vérification expérimentale.

On trouve que la variation de la contrainte tangentielle est telle que :

$$\tau_{\theta} - \sigma'_{\theta} = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{r^2} \right) \left(\frac{\varphi(b)}{b} - \frac{\varphi(a)}{a} \right).$$

a : rayon extérieur de l'anneau,

b : rayon intérieur de l'anneau,

σ_{θ} : contrainte tangentielle dans le disque,

σ'_{θ} : contrainte tangentielle dans l'anneau.

La différence des contraintes varie donc entre :

pour $r = a$:

$$(\sigma_{\theta} - \sigma'_{\theta})_{r=a} = \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \left[\frac{\varphi(b)}{b} - \frac{\varphi(a)}{a} \right]$$

pour $r = b$:

$$(\sigma_{\theta} - \sigma'_{\theta})_{r=b} = \frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} \left[\frac{\varphi(b)}{b} - \frac{\varphi(a)}{a} \right].$$

Si nous admettons une répartition de contrainte du type 1, figure 13, après alésage nous devons avoir une répartition de contrainte du type 2, figure 13. Nous choisirons donc le rayon b aussi voisin que possible du rayon a et tel que $\frac{\varphi(b)}{b}$

reste faible ou nul devant $\frac{\varphi(a)}{a}$. L'anneau doit rester par ailleurs de dimensions appréciables pour ne pas être déformé au cours de l'alésage.

Dans cette expérience nous avons choisi :

$$a = 14,85 \text{ mm.}$$

$$b = 9 \text{ mm.}$$

Pour déterminer le nouveau système de contraintes σ'_r et σ'_{θ} qui s'établit dans la pièce il faut résoudre le système (29).

On trouve que les nouvelles contraintes qui s'établissent dans l'anneau sont (en kilogrammes par centimètre carré) :

$$\left| \begin{array}{l} \sigma'_r = 46 - \frac{33}{r^2} + \frac{\varphi(r)}{r} \\ \sigma'_{\theta} = 46 + \frac{33}{r^2} + \varphi'(r). \end{array} \right.$$

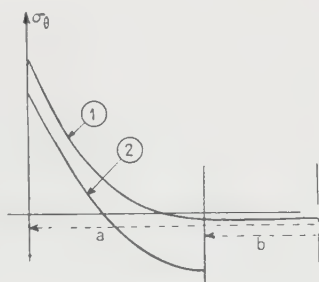


Fig. 13.

On remarque que les contraintes τ_r et τ_θ du disque donnent directement :

$$\frac{\varphi(r)}{r} = \tau_r(r) + \frac{\varphi(a)}{a},$$

$$\varphi'(r) = \tau_\theta(r) + \frac{\varphi'(a)}{a}.$$

Figures 14 et 11 nous avons représenté les contraintes τ_r' et τ_θ' ainsi calculées. Elles sont déterminées avec une erreur absolue qui est de l'ordre d'une dizaine de kilogrammes par centimètre carré.

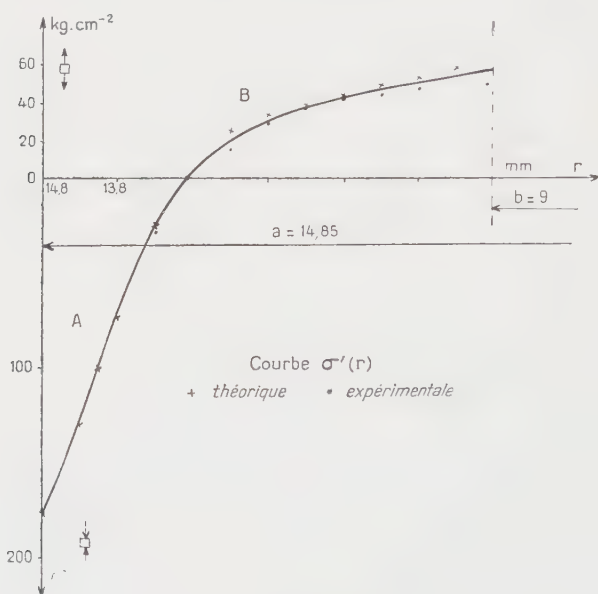


Fig. 14. — Contraintes dans un anneau de bakélite.

b) *Vérification expérimentale.* — L'étude photoélastique de l'anneau nous permet de tracer la courbe du nouveau retard optique $R'(r)$ qui est apparu dans la pièce après alésage. On constate que les contraintes radiales τ_r' et tangentielles τ_θ' sont bien les contraintes principales.

Par les formules de Maxwell-Mesnager nous séparons les contraintes, l'intégration étant faite à partir du bord extrême du disque $\tau_r(a) = 0$. Les contraintes τ_r' et τ_θ' , déterminées avec la même précision que dans le cas du disque, sont représentées figure 14 et 11.

Si l'on compare les courbes théoriques et expérimentales représen-

tant la contrainte tangentielle (nous laissons de côté la contrainte radiale qui étant de valeur faible est de détermination moins précise) on constate que :

1) il y a accord des résultats, à la précision de nos expériences près, dans la majeure partie de la courbe ;

2) il y a désaccord entre l'expérience et la théorie dans la partie de la courbe où le rayon varie entre b et $b + 1$ mm, c'est-à-dire autour de la zone qui vient d'être alésée. On peut expliquer ce phénomène en admettant que les contraintes sont dans cette zone perturbées par les contraintes d'usinage.

Conclusion et remarques :

a) L'étude faite sur les poutres et les disques trempés montre que les contraintes ainsi développées sont, dans les limites de précision de nos expériences :

1) en équilibre (ce qui entraîne l'isotropie des dilatations provoquées) ;

2) régies par le système d'équations (III).

On peut donc appliquer à ces contraintes les résultats de la première partie.

b) Les conclusions, pour être justifiées, exigent que la pièce étudiée soit dans un état de contraintes tel que la photoélasticité plane soit applicable. Il ne suffit pas que la pièce découpée soit mince pour que l'on puisse affirmer que la contrainte normale à la plaque est nulle. L'étude que nous ferons au dernier chapitre nous montrera que les isostatiques ont des courbures fortement variables dans les angles de la pièce (fig. 24). Il pourra donc se produire, si la pièce est découpée trop près des faces de trempe, une variation de l'orientation des contraintes principales dans l'épaisseur même de la plaque. On est donc là en présence de modèles inexploitable par la photoélasticité.

c) Notre démonstration de la nature des contraintes créées par trempe ne porte que pour un certain domaine de températures de trempe, entre 110° et 0° C. Il n'est pas certain que des trempes plus violentes continuent à créer des dilatations isotropes.

d) On remarque que certaines courbes de dilatation présentent, après de fortes valeurs positives, des valeurs faibles négatives correspondant à une contraction. Ce phénomène est observable dans les poutres comme dans les disques. De même on peut noter que les contraintes théoriques et expérimentales que l'on détermine dans un modèle usiné présentent une légère différence dans une certaine zone (zone B, fig. 14).

Nous montrerons que l'on peut expliquer ces deux remarques par

une diffusion secondaire se produisant au sein même du matériau.

Étudions au préalable les contraintes créées par diffusion.

Étude de la diffusion. — Étudions la biréfringence et par suite les contraintes provoquées par un phénomène de diffusion dans les pièces de bakélite. Nous ne considérerons, sauf cas particulier, que la diffusion de molécules d'eau. La diffusion peut être réalisée en immergeant dans un bac d'eau les pièces d'étude ou plus simplement en les abandonnant pendant quelque temps à l'air ambiant.

Des essais préliminaires montrent que la biréfringence créée en bac d'eau, à une température égale ou supérieure à la température ambiante, est une biréfringence qui évolue rapidement au cours du temps. Cela nous interdit de faire, sur de telles pièces, la série d'expériences nous permettant de connaître la nature des contraintes résiduelles développées. Nous ne ferons donc l'étude quantitative complète que sur des pièces dont la biréfringence a été développée à température ambiante et dans l'air ambiant. Cette biréfringence est pratiquement constante pendant quelques dizaines d'heures. Dans un prochain paragraphe nous considérerons les diffusions un peu particulières créées en bac d'eau ou avec d'autres liquides que l'eau.

Les expériences exposées maintenant étant les mêmes que dans le cas de la trempe, nous nous contenterons d'en formuler les résultats.

Cas des poutres. — Un parallélépipède de bakélite $14,8 \times 10 \times 100$ mm usiné avec précaution a séjourné pendant 3 mois au laboratoire. Il a été alors découpé une poutre de 2,9 mm d'épaisseur matérialisant le plan médian.

Figure 15 nous avons tracé la courbe donnant le retard optique en fonction de l'ordonnée y .



Fig. 15. — Biréfringence créée par diffusion dans une poutre de bakélite.

Équilibre des contraintes.

La résultante des contraintes en compression, proportionnelle à l'aire S_1 , est équilibrée par la résultante des contraintes en extension S_2 .

Avec les unités de la figure 19 on trouve :

$$\begin{aligned} S_1 &= 330 \pm 15 \text{ mm}^2, \\ S_2 &= 320 \pm 20 \text{ mm}^2. \end{aligned}$$

On a donc développé, à la précision de nos expériences, des contraintes en équilibre, ce qui confirme que l'origine de ces contraintes est bien une dilatation.

On constate que l'équilibre des contraintes est vérifié pour toute poutre découpée à plus de 1 mm des faces du parallélépipède. Cela résulte de l'extrême localisation de ces contraintes.

Usinage de la poutre.

Par usinage on a ramené la poutre à n'avoir plus qu'une largeur de 6 mm :

$$2e = 14,8 \text{ mm} \qquad e + e' = 6 \text{ mm.}$$

Par photoélasticité il est facile de déterminer la nouvelle répartition des contraintes. Figure 16 nous avons tracé la courbe $\sigma'_x(y)$.



Fig. 16. — Contraintes de diffusion dans une poutre de bakélite.
+ théoriques , expérimentales.

On peut aussi théoriquement résoudre le système d'équations (26) et retrouver ces contraintes. On a ici :

$$\begin{aligned} A &= 6 \text{ kg/cm}^{-1} & \alpha' &= 55 \text{ kg/cm}^{-3} \\ B &= 4,2 \text{ kg} & \beta' &= -14 \text{ kg/cm}^{-2} \end{aligned}$$

et par suite la contrainte $\sigma'_x(y)$ qui s'établit dans la poutre est en kilogrammes par centimètre carré :

$$\sigma'_x(y) = -E\delta_0(y) + 55y - 14.$$

Figure 16 nous avons tracé cette courbe. On constate qu'il y a accord, à la précision de nos expériences, entre les résultats théoriques et expérimentaux.

Pour confirmer l'intérêt des contraintes créées par diffusion étudions celles qui se développent dans un disque.

Cas des disques. — Un cylindre de bakélite de 37,8 mm et de hauteur $h = 10$ mm est usiné avec précaution. Dans ce cylindre qui a séjourné 3 mois au laboratoire, on a découpé un disque de 3,1 mm d'épaisseur caractérisant le plan médian.

Étude photoélastique.

Figure 17 nous avons représenté les contraintes radiales et tangentielles en fonction du rayon r du disque. La contrainte radiale est ici beaucoup plus faible que dans le cas des disques trempés, elle évolue entre 0 et 6 kg/cm^2 . La contrainte tangentielle varie entre une

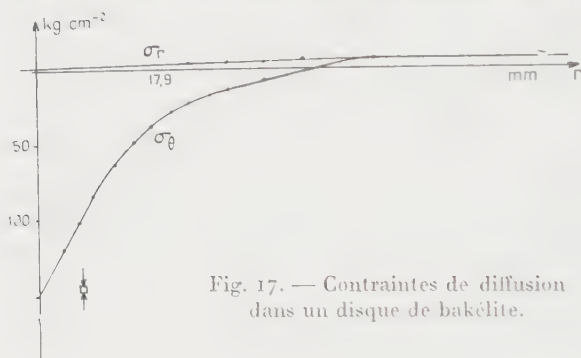


Fig. 17. — Contraintes de diffusion dans un disque de bakélite.

forte compression (-150 kg/cm^2) et une valeur faible d'extension ($+6 \text{ kg/cm}^2$). Cette variation se fait dans une zone qui est de l'ordre de 3 mm autour du bord du disque.

L'erreur dans la mesure du retard optique est du même ordre que celle trouvée pour le disque.

Usinage du disque.

a) *Calcul théorique.* — Figure 18 nous avons représenté la fonction $\delta_0(r)$ calculée à partir des valeurs expérimentales précédentes.



Fig. 18. — Dilatation due à une diffusion dans un disque de bakélite.

Pour provoquer par usinage une grande variation de la contrainte tangentielle nous avons été amené par des considérations, analogues à celles exprimées au paragraphe précédent, à choisir :

$$a = 18,9 \text{ mm ;}$$

$$b = 15,1 \text{ mm.}$$

La résolution du système (29) donne, pour les contraintes qui s'établissent dans l'anneau (en kg/cm^2) :

$$\left| \begin{array}{l} \sigma'_r = 17 - \frac{39}{r^2} - 6 + \sigma_r(r) \\ \sigma'_\theta = 17 + \frac{39}{r^2} - 6 + \sigma_\theta(r) . \end{array} \right.$$

Figure 19 nous avons représenté la contrainte σ'_θ ainsi calculée. Elle est déterminée avec une erreur absolue qui est de l'ordre de 4 kg/cm^2 .

b) *Vérification expérimentale.* — L'étude photoélastique de l'anneau nous donne le nouveau retard optique $R'(r)$.

Les contraintes séparées par les formules de Maxwell-Mesnager sont représentées figure 19. Sur la même figure nous avons porté les valeurs théoriques et expérimentales trouvées pour la contrainte tangentielle.

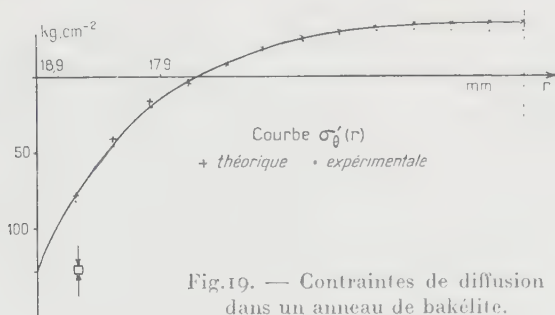


Fig. 19. — Contraintes de diffusion dans un anneau de bakélite.

On constate ici encore qu'il y a accord des résultats à la précision de nos expériences, dans la majeure partie de la courbe. Au voisinage de la zone alésée la courbe théorique s'écarte de la courbe expérimentale, cette perturbation peut s'expliquer par l'introduction de contraintes d'usinage.

Autres phénomènes de diffusion. — A) Nous avons déjà signalé que la courbe qui donne la dilatation en fonction de la distance au bord de l'éprouvette passe dans certains cas d'une valeur fortement positive à une valeur faiblement négative avant de s'annuler. Nous avons noté ce phénomène, de façon particulièrement nette, dans les expériences de trempe qui ont développé des contraintes importantes au bord de la pièce (fig. 8).

La valeur négative de la dilatation δ_0 correspond physiquement à une diminution de volume vis-à-vis du volume initial. On provoque un tel phénomène soit en abaissant la température de la pièce, soit en appauvrissant d'un de leurs gonflants, si elles en possèdent, les mailles de la matière.

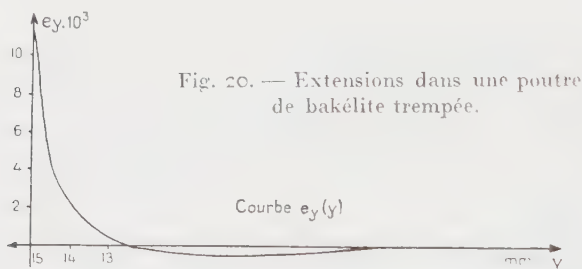
On pourrait peut-être expliquer le phénomène de dilatation négative qui accompagne la trempe par le mécanisme suivant.

Le traitement de trempe développe dans la bakélite une zone A où les contraintes sont en compression et une zone B où les contraintes sont en extension. Il est facile de constater, en calculant les extensions e_x et e_y , que la zone A est dilatée alors que le cœur de la pièce (zone B) n'a pratiquement pas été modifié.

Dans le cas de la trempe de la poutre de bakélite, étudié précédemment, on trouve :

$$\begin{aligned} Ee_x &= \sigma_x(0) & e_x &= 0,16 \cdot 10^{-3} \\ Ee_y &= \sigma_x(0) - (1 + \nu)\sigma_x(y). \end{aligned}$$

La courbe e_y a été tracée figure 20.



Si la matière est riche en gonflants, c'est-à-dire en molécules qui n'interviennent pas dans la structure même de la maille, ces molécules ont la possibilité de se déplacer.

Dans la bakélite, qui est un produit de condensation, nous avons un excès de molécules d'eau. On conçoit que ces molécules, qui sont petites, migrent assez facilement de la zone B à la zone dilatée A.

C'est cet appauvrissement en molécules migratrices des couches voisines de la zone dilatée qui nous permet d'expliquer l'apparition d'une dilatation négative.

Remarquons que ce phénomène est faible et que les biréfringences qui accompagnent cette variation de dilatation sont de l'ordre du dixième de longueur d'onde pour une épaisseur de plaque de 3 mm.

Pour justifier ce mécanisme nous avons fait les deux expériences suivantes :

α) On a fait diffuser dans la bakélite des molécules de benzène. Ces grosses molécules créant une dilatation dans la zone A ont entraîné elles aussi une aspiration des molécules migratrices de la partie B. Figure 21 nous avons tracé la courbe de la dilatation ainsi obtenue.

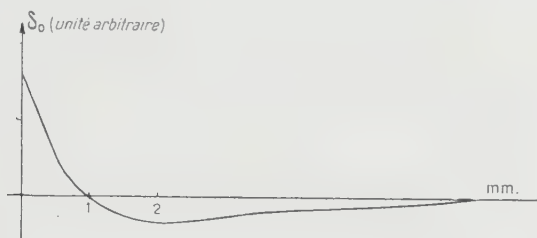


Fig. 21. — Dilatation provoquée par une diffusion de benzène.

Cette expérience faite à température ordinaire avec un corps chimiquement inerte confirme l'origine purement physique du phénomène.

b) Si l'on part d'une matière qui ne possède pas de molécules migratrices le phénomène ne doit pas pouvoir être observé. On a donc fait subir une trempe à des pièces d'araldite et de plexiglas qui sont des produits de polymérisation. Nous n'avons pas observé dans ce cas une dilatation négative.

Il semble donc que l'hypothèse de ce mécanisme soit acceptable. Remarquons que le même mécanisme a été démontré dans le cas des diffusions d'atomes d'azote ou de carbone dans les mailles du fer.

Remarque. — Nous avons supposé, lors de l'étude du système d'équations (III) qu'un usinage pouvait être fait dans une pièce sans y altérer les dilatations initialement provoquées. Le mécanisme que nous venons d'exposer met en doute cette hypothèse. En effet les molécules migrent plus ou moins suivant l'intensité des contraintes créées aux bords de la pièce. Or tout usinage provoque généralement une brutale modification de l'intensité des contraintes. Il y aura donc une modification des migrations qui se développent au voisinage des zones dilatées. On peut ainsi expliquer les faibles différences mises en évidence dans ces matériaux entre les contraintes théoriques, calculées à partir d'une courbe de dilatation existant dans la pièce avant usinage, et les contraintes expérimentales trouvées, différences qui se produisent bien au voisinage des zones dilatées.

Conclusion à l'étude des contraintes de diffusion. — L'étude faite montre que les contraintes de diffusion développées dans la bakélite sont, à la précision de nos expériences :

— en équilibre (ce qui entraîne l'isotropie des dilatations provoquées) ;

— régies par le système d'équations (III).

On peut donc utiliser la biréfringence résiduelle ainsi créée pour l'étude des distributions des contraintes résiduelles de dilatation dans les pièces.

Lors de l'étude des fortes diffusions on a constaté, qu'après stabilisation, les contraintes calculées sont en équilibre. La dilatation ainsi provoquée est donc toujours isotrope.

CONCLUSION GÉNÉRALE A L'ÉTUDE DE LA BAKÉLITE. — La bakélite BT 61893 apparaît comme une matière intéressante pour l'étude des contraintes résiduelles de dilatation.

Les expériences que nous venons d'exposer montrent que la trempe et la diffusion créent des biréfringences qui, moyennant certaines précautions expérimentales, ont une signification simple du point de vue photoélastique. Les contraintes qui en résultent sont, à une précision qui est de l'ordre de 10/100, des contraintes résiduelles de dilatation.

On a constaté que les contraintes créées par trempe ou par diffusion ont des aspects identiques. Les contraintes de diffusion sont cependant plus localisées au bord de la pièce que les contraintes de trempe.

Les traitements ainsi exposés seront par la suite appliqués à des pièces de formes quelconques.

Nous allons donner maintenant des résultats d'essais obtenus avec d'autres matières.

ESSAIS SUR L'ALLITE OU CR 39. — La matière photoélastique connue sous le nom de CR 39 ou allite est une résine thermodurcissable. Elle est obtenue par polymérisation du diglycolcarbonate, le monomère étant lui-même le résultat d'une estérification. Cette substance extrêmement transparente possède les caractéristiques suivantes :

$$E = 17\,500 \text{ kg/cm}^{-2} \qquad C = 30 \text{ Brewsters.}$$

Une étude rapide montre que la biréfringence résiduelle qui se développe au bord d'une plaque est, suivant le cas, signe de contraintes en compression ou en extension.

Si l'on prend une poutre que l'on chauffe à une trentaine de degrés pendant plusieurs heures on développe des contraintes d'extension à bord. Si on laisse alors séjourner la poutre dans un bac d'eau on constate que cet effet de bord disparaît. Si on prolonge le séjour de la poutre dans l'eau il se développe un nouvel effet de bord, signe cette fois de contraintes en compression.

Cette matière apparaît donc extrêmement intéressante pour l'étude des contraintes résiduelles. On peut à volonté développer des contraintes

en compression ou en extension. Ces contraintes ont pour origine un départ ou une fixation de molécules d'eau.

Malheureusement l'équilibre des contraintes dans une poutre n'est pas vérifié.

Le non-équilibre des contraintes entraîne une variation du coefficient de Brewster dans la plaque et par suite l'impossibilité d'exploiter les biréfringences résiduelles obtenues.

Nous avons fait sur ce matériau les remarques suivantes :

a) L'allite est une substance qui se présente en plaques plus ou moins épaisses. On constate une forte biréfringence initiale lorsque l'on fait une observation parallèlement au plan de la plaque. Ces contraintes initiales peuvent expliquer la non-isotropie des dilatations que l'on provoque.

b) Il nous a été possible de figer des contraintes résiduelles, révélant des contraintes d'extension à bord dans ce matériau. Cette biréfringence, créée par perte de substance, se fige aisément car l'élévation de température nécessaire au figeage ne s'oppose pas mais au contraire développe cette biréfringence.

Ce matériau, actuellement inexploitable pour l'étude des contraintes résiduelles, a l'intérêt de montrer par quelle méthode il est possible de figer des contraintes résiduelles. Il serait intéressant de pouvoir répéter ces expériences avec une plaque d'allite dépourvue de contraintes initiales.

ESSAIS SUR L'ARALDITE B. — L'araldite est une résine thermodurcissable. C'est un polymère de condensation appartenant à la classe des résines épikotes. Le durcissement de cette résine est le résultat d'une polymérisation obtenue par addition d'une petite quantité d'amine. Cette matière, de couleur jaune brun, a les caractéristiques suivantes :

$$E = 30\,000 \text{ kg/cm}^2 \quad C = 55 \text{ Brewsters.}$$

Étude de la trempe.

La trempe ne développe pratiquement pas de biréfringence dans l'araldite.

Une trempe de 100° à 10° provoque, dans une poutre de 15 mm d'épaisseur, une biréfringence qui est au maximum de l'ordre de $3/10$ à $4/10$ de longueur d'onde. Cette biréfringence est trop faible vis-à-vis des biréfringences parasites provoquées lors de l'usinage pour que nos modèles puissent être étudiés avec précision.

Étude de la diffusion.

Si on laisse pendant quelques jours une poutre d'araldite à l'air ambiant on constate qu'il s'y développe un effet de bord intense. Cet effet a pour origine une diffusion des molécules d'eau de l'atmosphère dans la pièce.

On a étudié cette diffusion en suivant la méthode déjà exposée dans le cas de la bakélite.

Figures 22 et 23 nous avons représenté la distribution des contraintes développées dans une poutre et un disque. Ces contraintes vérifient les équations d'équilibre et le système d'équations (III). La précision des expériences est analogue à celle obtenue dans le cas de la bakélite.

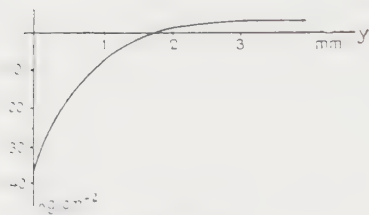


Fig. 22.

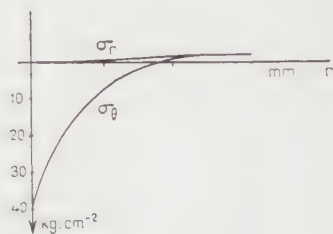


Fig. 23.

Fig. 22. — Contraintes de diffusion dans une poutre d'araldite.

Fig. 23. — Contraintes de diffusion dans un disque d'araldite.

On constate qu'il ne se produit pas au sein de ce matériau des diffusions annexes. Les dilatations développées aux différents points de la pièce ont toujours été trouvées positives.

Cette matière est donc extrêmement intéressante pour l'étude des contraintes résiduelles. Pour le type d'araldite étudié seuls les phénomènes de diffusion créent des biréfringences notables.

ESSAIS SUR LE PLEXIGLAS. — Le plexiglas étant le matériau usuel de la photoélasticité il nous a paru intéressant de lui faire subir les essais précédemment décrits.

Rappelons que le plexiglas résulte d'une polymérisation du méthyl-métacrylate auquel on ajoute un plastifiant. Les caractéristiques sont :

$$E = 36\,000 \text{ kg./cm}^2 \quad C = 5 \text{ Brewsters.}$$

La trempe développe dans le plexiglas une biréfringence assez faible. Elle est au maximum de l'ordre de $2/10$ à $3/10$ de longueur d'onde pour une plaque de 1 cm d'épaisseur.

Le plexiglas peut, dans certaines conditions, fixer des molécules d'eau. Un disque de plexiglas, laissé dans l'eau à 35°C pendant une semaine, avait une biréfringence à bord de $1,4 \lambda$ (épaisseur 1 cm). Cette biréfringence disparaît rapidement à l'air libre et est par suite difficile à étudier. On constate cependant que les dilatations ainsi développées

sont toujours positives et qu'il n'y a pas de migration de molécules au sein de ce matériau.

Il résulte des propriétés du plexiglas qu'il est difficile d'y développer un effet de bord appréciable, ce qui en fait un matériau de choix pour les études photoélastiques normales.

CONCLUSION A L'ÉTUDE EXPÉRIMENTALE. — Nous avons dans cette deuxième partie étudié les moyens de développer une biréfringence résiduelle et recherché les expériences permettant de contrôler sa signification physique.

Dans cette étude nous avons noté les points suivants :

il est important de relier la biréfringence aux extensions et non aux contraintes. On peut justifier ainsi l'origine des contraintes résiduelles que l'on étudie et expliquer le déséquilibre des contraintes de distortion calculées par photoélasticité ;

les phénomènes de trempe et de diffusion développent généralement une biréfringence résiduelle dans les matériaux. L'apparition de la biréfringence due à la trempe dépend du coefficient de dilatation de la matière. On doit donc distinguer dans ces expériences les corps thermoplastiques des corps thermodurcissables ;

les matières photoélastiques obtenues par condensation sont généralement riches en molécules d'eau. Des phénomènes secondaires de diffusion peuvent alors s'y produire. Ces migrations de molécules sont généralement assez faibles pour ne pas gêner l'étude du phénomène initial ;

les expériences faites sur les poutres et les disques de bakélite et d'araldite montrent qu'il est possible d'y développer des contraintes résiduelles de dilatation. Il est nécessaire que les matières soient avant tout traitement dépourvues de contraintes initiales. Ces contraintes perturbent en effet l'isotropie des dilatations que l'on provoque.

Sachant maintenant développer des contraintes résiduelles de dilatation nous allons étudier quelques applications.

TROISIÈME PARTIE

Applications à quelques cas simples.

Nous allons appliquer la méthode photoélastique à la détermination de contraintes résiduelles de dilatation de quelques pièces de formes simples.

Ces applications ont un double but.

D'une part, confronter cette méthode aux autres méthodes expérimentales de détermination des contraintes résiduelles.

D'autre part, préciser le mode d'emploi de la méthode photoélastique.

Nous appliquerons ensuite cette méthode à la détermination des distributions de contraintes dans des pièces de formes simples. Poutre, plan méridien d'un cylindre, ellipse.

Ces applications nous permettront de déterminer les renseignements que l'on peut obtenir par cette méthode et ainsi de conclure ce travail.

Principes des autres méthodes de mesure. — Les méthodes utilisées pour la détermination des contraintes résiduelles ont fait l'objet de nombreuses publications, cf. (10) et (11). Ces méthodes (méthode extensométrique, de dureté hertzienne) permettent de déterminer l'intensité des contraintes, quand celles-ci ont une orientation simple et connue dans la pièce. Parfois même, certaines de ces mesures imposent une variation lente de l'intensité des contraintes dans l'épaisseur de la pièce.

La comparaison des résultats obtenus par la méthode photoélastique et les autres méthodes se heurte donc à plusieurs difficultés.

1) Il ne sera possible de comparer que des intensités de contraintes et non des répartitions.

2) La comparaison des résultats portera sur des contraintes créées par diffusion.

Ces limitations étant connues il nous a paru cependant intéressant de confronter les résultats obtenus par ces diverses méthodes.

Détermination du produit $\sqrt{Dt}$. — Nous avons montré dans la première partie que la diffusion dans un modèle est généralement caractérisée par un nombre N sans dimension :

$$N = \frac{L}{\sqrt{Dt}}.$$

Il est donc important de déterminer dans chaque cas le produit Dt caractérisant une diffusion. Remarquons, en conséquence de la théorie faite, que c'est le coefficient de diffusion et le temps de diffusion régissant la courbe de dilatation $\delta_0(x, y, t)$, qui interviennent ici.

La détermination de ce produit sera faite, soit par l'étude de la courbe $\delta_0(x, y, t)$, soit par l'étude d'une grandeur qui lui est directement proportionnelle et qui est par suite régie par la même loi de Fourier.

Par exemple, dans le cas d'une pièce cimentée, la dilatation qui apparaît en chaque point est directement proportionnelle au taux de martensite formé. Dans ce cas, on raisonnera directement sur la courbe donnant le taux de martensite formée en fonction de la distance au bord de la pièce.

La détermination du produit Dt sera faite, dans le cas d'une poutre, en calculant l'aire comprise entre la courbe $\delta_0(y)$ et les axes de coordonnées. En effet :

$$\int_0^x \delta_0(y) dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\delta_F - \delta_i) \sqrt{Dt}.$$

Si nous connaissons par suite de l'étude photoélastique ou de l'étude métallographique la courbe $\delta_0(y)$, nous déterminerons facilement le produit $\sqrt{Dt}$.

Donnons la valeur de ce produit obtenue dans les exemples de trempe et de diffusion précédemment étudiés.

a) Cas de la trempe dans la bakélite :

Poutre : $\sqrt{Dt} = 9,7 \cdot 10^{-2}$ cm.

Disque : $\sqrt{Dt} = 24 \cdot 10^{-2}$ cm.

b) Cas de la diffusion dans la bakélite :

Poutre : $\sqrt{Dt} = 5 \cdot 10^{-2}$ cm.

Disque : $\sqrt{Dt} = 5,7 \cdot 10^{-2}$ cm.

c) Cas de la diffusion dans l'araldite B :

Poutre : $\sqrt{Dt} = 11 \cdot 10^{-2}$ cm.

Disque : $\sqrt{Dt} = 10 \cdot 10^{-2}$ cm.

Comparons ces résultats à ceux que développent des traitements courants dans les aciers. Nous admettons en première approximation que ces traitements obéissent à une loi de Fick.

Nitruration. — Soit un acier de nitruration Cr, Al, Mo. Les temps usuels de nitruration sont de l'ordre d'une centaine d'heures et D le coefficient de diffusion est de l'ordre de $0,3 \cdot 10^{-7}$ cm/sec⁻¹. On a donc :

$$\sqrt{Dt} = 10 \cdot 10^{-2} \text{ cm.}$$

Cémentation. — Soit un acier de cémentation NiCr cimenté au gaz pendant 7 heures à 885° C. cf. (11). Le produit $\sqrt{Dt}$ calculé à partir du taux de martensite formée a été trouvé égal à :

$$\sqrt{Dt} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ cm.}$$

Trempe. — Soit un cylindre de 98 mm de diamètre en acier C 39 chauffé à 550° C et trempé à l'eau, cf. (2). On trouve :

$$\sqrt{Dt} = 300 \cdot 10^{-2} \text{ cm.}$$

Nous constatons que le produit $\sqrt{Dt}$ est du même ordre de grandeur pour les pièces métalliques de cémentation ou de nitruration et pour

les pièces de bakélite ou d'araldite ayant subi une diffusion. Nous avons là une circonstance favorable qui va permettre une utilisation simple de la méthode photoélastique pour l'étude des distributions des contraintes dans les pièces cémentées ou nitrurées.

Considérons par exemple le disque cémenté précédemment étudié. Son diamètre est de 58 mm. La détermination des contraintes le long d'un rayon a été faite par la méthode extensométrique. Le produit $\sqrt{Dt}$ est dans ce modèle de $6 \cdot 10^{-2}$ cm. Il est facile de le reproduire dans une pièce de bakélite.

Après quelques essais nous avons réussi à développer, dans un disque de bakélite de diamètre 58 mm, une diffusion telle que :

$$\sqrt{Dt} = 5,7 \cdot 10^{-2} \text{ cm.}$$

Dans l'acier, la contrainte tangentielle varie de 140 kg/mm^{-2} à $3,6 \text{ kg/mm}^{-2}$. Il y a à la surface du corps, par suite d'une hypertrempe, diminution de cette contrainte.

Dans la bakélite, la même contrainte varie de 150 kg/cm^{-2} à 4 kg/cm^{-2} . On constate donc, bien que l'on étudie des contraintes n'obéissant pas rigoureusement à des lois de Fick, que les tensions ainsi développées sont approximativement proportionnelles. On pourra donc en première approximation, utiliser cette méthode pour déterminer les distributions de contraintes dans les pièces cémentées ou nitrurées.

La difficulté d'emploi de cette méthode consiste à réaliser un traitement qui, pour une pièce de dimensions données imposera au produit $\sqrt{Dt}$ une valeur connue. Ce traitement sera mis au point par des essais préalables.

Les phénomènes de diffusion sont facilement exploitables. On constate en effet que si l'on expose à la vapeur d'eau pendant un temps donné des modèles de formes et de volumes différents, il s'y développe des diffusions identiques caractérisées par le même produit $\sqrt{Dt}$.

Il n'en est pas de même pour les phénomènes de trempe. Le traitement ainsi que les dimensions de la pièce influent sur la valeur du produit $\sqrt{Dt}$, les essais préalables doivent tenir compte de ces différents facteurs.

Distribution de contraintes résiduelles pour des pièces de formes simples. — **POUTRE DE DIMENSIONS FINIES.** — Soit une poutre $100 \times 30 \text{ mm}$. Cette poutre matérialise le plan médian d'un parallélépipède. On peut considérer que cette poutre est une section extraite d'un parallélépipède infiniment long dont la base est le rectangle $100 \times 30 \text{ mm}$. L'usinage permet donc de passer d'un problème de déformations planes à un problème de contraintes planes. On sait que les isostatiques n'ont pas été modifiées mais que seule l'intensité des contraintes a varié :

$$\frac{\sigma_x}{\sigma'_x} = \frac{\sigma_y}{\sigma'_y} = \frac{\tau_{xy}}{\tau'_{xy}} = 1 - \nu.$$

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$: contraintes après découpage ;

$\sigma'_x, \sigma'_y, \tau'_{xy}$: contraintes avant découpage.

Le tracé des isostatiques de cette poutre a donc une signification physique. Figure 24 nous avons tracé ce réseau en adoptant la convention habituelle de la photoélasticité. En trait plein ont été dessinées les isostatiques tangentes aux contraintes σ_1 , en trait pointillé les isostatiques tangentes aux contraintes σ_2 . Les contraintes σ_1 et σ_2 sont telles que :

$$\sigma_1 > \sigma_2.$$

Nous pouvons, à l'aide de ce tracé, déterminer l'influence de la largeur de la poutre sur le réseau des isostatiques et ainsi préciser les conditions d'emploi des méthodes extensométriques ou de durée hertzienne. Il nous est de plus possible de suivre les variations des contraintes et en particulier de noter les variations de la contraintes σ_x le long de l'axe des abscisses.

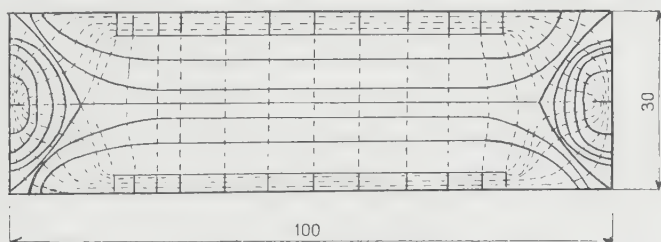


Fig. 24. — Isostatiques dans une poutre trempée.

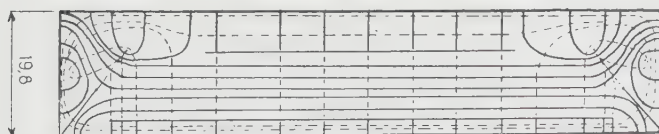


Fig. 25. — Evolution des isostatiques.

Nous avons diminué la largeur de cette poutre et tracé le nouveau réseau d'isostatiques qui s'y établit figure 25. On constate que le réseau a été perturbé et que le domaine où les contraintes σ_x, σ_y sont parallèles aux axes a diminué.

PLAN MÉRIDIEEN D'UN CYLINDRE. — Il s'agit d'un cylindre que l'on a trempé et dont on a découpé une plaque matérialisant le plan méridien. La figure 26 représente les isochromes dans cette section.

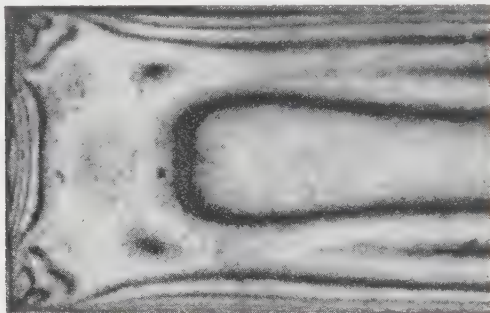


Fig. 26. — Isochromes dans le plan méridien d'un cylindre trempé.

Nous avons un réseau d'isostatiques extrêmement perturbé (fig. 27). Comme nous ne savons interpréter que les réseaux venant de problèmes de contraintes ou de déformations planes nous ne pouvons relier ce réseau aux isostatiques qui initialement existaient dans le cylindre. C'est là une limitation de la méthode qu'il ne faut pas oublier.

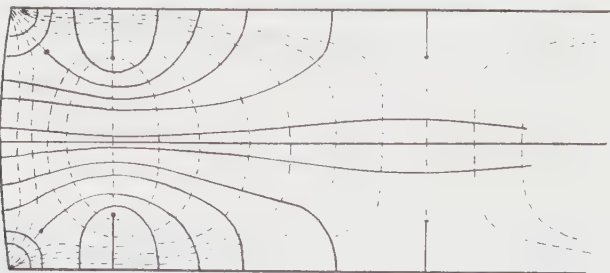


Fig. 27. — Isostatiques dans le plan méridien d'un cylindre trempé.

Il nous a paru cependant intéressant de tracer ce réseau d'isostatiques car il montre que le phénomène de trempe crée parfois des perturbations importantes dans les pièces.

CYLINDRE DE BASE ELLIPTIQUE. — On a étudié la section d'un cylindre de base elliptique. Ce cylindre a été trempé et l'on a extrait par usinage une ellipse de faible épaisseur. Figure 28 on a représenté les isochromes de cette ellipse.

Cette expérience a été faite dans le but de déterminer sur les deux axes de l'ellipse la valeur du produit $\sqrt{Dt}$. Dans cette ellipse, où les axes ont été choisis très différents dans le rapport 0.6, on constate une légère variation de ce produit de l'ordre de 10/100.

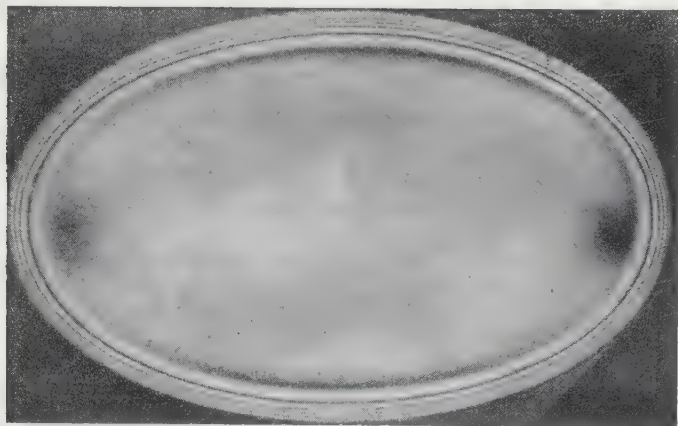


Fig. 28. — Isochromes dans une ellipse trempée.

Nous avons là une limitation de la méthode de trempe pour l'étude des contraintes obéissant à une loi de Fick. Il faut que le contour de la pièce et la trempe que l'on réalise développent dans le modèle une diffusion dont les caractéristiques soient constantes en tous points.

Conclusion. — Pour faire une étude pratique de la distribution des contraintes résiduelles de dilatation ayant pour origine un phénomène de diffusion il faut :

- 1) Déterminer D et t caractérisant la diffusion qui a été produite dans le matériau que l'on veut étudier.
- 2) Reproduire dans le matériau photoélastique la valeur du nombre N caractérisant la diffusion et la géométrie du corps que l'on étudie.

Cette reproduction est simple si l'on utilise une diffusion de molécules d'eau dans la matière. On constate en effet dans ce cas que le produit $\sqrt{Dt}$ est, pour un traitement donné, constant quels que soient la forme et le volume du modèle considéré.

De plus on a remarqué que le produit $\sqrt{Dt}$ était du même ordre de grandeur dans les pièces de cémentation et dans les pièces de bakélite

absorbant de l'eau. Pour l'étude de ces phénomènes la réalisation des modèles est simple.

Il n'en est pas de même dans les phénomènes de trempe où l'on constate que le produit $\sqrt{Dt}$ est variable suivant le volume et la forme de la pièce.

Pour des modèles de formes compliquées la trempe ne peut être utilisée pour développer une dilatation obéissant à une loi de Fick.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Nous nous proposons au début de ce travail de rechercher si la photoélasticité pouvait être utilisée pour l'étude des contraintes résiduelles.

Cette recherche comprenait obligatoirement deux parties :

- une partie mathématique pour formuler le problème ;
- une deuxième partie pour rechercher une résolution expérimentale des équations.

Nous allons résumer ici les résultats que nous avons obtenus, formuler les améliorations que l'on pourrait apporter à la méthode et préciser son domaine actuel d'application.

L'étude mathématique de la distribution des contraintes résiduelles a montré que le système simple de l'élasticité classique doit être modifié sur deux points. D'une part les coefficients caractéristiques de la matière E et ν s'introduisent dans les équations, d'autre part l'équation de compatibilité possède maintenant un second membre.

L'étude du système d'équations a montré qu'une méthode d'analogie portant sur les répartitions de contraintes est possible si l'on sait reproduire, à un coefficient de proportionnalité près, la fonction de dilatation δ_0 dans un modèle. Cette condition apparaît comme difficile à réaliser si cette fonction est arbitraire.

Si les contraintes ont pour origine une dilatation obéissant à une loi de diffusion nous avons montré que la répartition des contraintes pouvait être étudiée moyennant une certaine homothétie des pièces.

Tous les corps géométriquement semblables où les nombres $\frac{L}{\sqrt{D}}$ et t sont égaux auront des répartitions de contraintes homothétiques.

Pour résoudre expérimentalement le système d'équations nous avons cherché à développer des contraintes résiduelles de dilatation dans les matériaux photoélastiques. Nous avons constaté que l'interprétation des biréfringences résiduelles confirme que la loi de base de la photoélasticité est la loi de Neumann qui lie la biréfringence aux extensions principales. L'application de cette loi montre que les biréfringences créées par trempe ou par diffusion dans la bakélite ou l'araldite peuvent être

traduites en terme de contraintes. Nous avons donc là un moyen de résoudre entièrement un problème de distribution de contraintes résiduelles.

Des améliorations pourraient être apportées par une étude systématique des différentes matières photoélastiques au point de vue des phénomènes de diffusion et de trempe que l'on peut y provoquer.

D'autres mécanismes pourraient être utilisés pour créer et étudier les contraintes de dilatation. Par exemple le choc thermique. Si nous faisons une étude photoélastique avant toute diffusion de la chaleur dans la pièce, nous déterminerions ainsi la distribution des contraintes accompagnant une dilatation unitaire provoquée en surface. Etant donnée la linéarité des équations nous aurions là un moyen de décomposer l'étude des contraintes développées dans un modèle où la fonction de dilatation est quelconque.

La méthode que nous avons développée apparaît comme fructueuse pour l'étude du comportement des matériaux photoélastiques lors des phénomènes de trempe et de diffusion. Elle est particulièrement bien adaptée pour l'étude des contraintes de dilatation obéissant à une loi de Fourier et permet dans ce cas de déterminer rapidement la distribution des contraintes dans une pièce de forme quelconque.

Cette étude confirme enfin, comme de nombreux autres travaux de la mécanique physique, qu'il est possible de comparer le comportement mécanique de matières qui sont pourtant de natures très différentes (matières plastiques et aciers).

BIBLIOGRAPHIE

- (1) P. ACLOQUE. — Traitements thermiques modifiant les propriétés du verre, en particulier sa fragilité. *Verres et Réfractaires*, Fr., 1954, n° 5.
- (2) H. BÜHLER. — *Residual stresses in metals and metal construction* (Les contraintes résiduelles dans les métaux et la construction métallique). Reinhold Publishing, N. Y., U. S. A., 1954.
- (3) R. B. HEYWOOD. — *Designing by photoelasticity* (Le dessin par la photoélasticité). Chapman et Hall, Ltd., G.-B., 1952, 76-83.
- (4) W. LEAF. — *Photoelastic determination of residual stresses caused by rapid cooling* (Détermination photoélastique des contraintes résiduelles provoquées par trempe). Proc. 14th Semi-An. East. Py. Conf., G.-B., 1941.
- (5) H. LE BOITEUX. — Les problèmes plans dans l'analyse des contraintes. *Anal. d. Contraintes*, Fr., 1952, n° 4, 10, 11, 12, 26-30.
- (6) H. LE BOITEUX. — Comportement général des matériaux visqueux dans les domaines élastiques et plastiques. *Recherche Aéronau.*, Fr., 1956, n° 54.

- (7) H. LE BOITEUX et R. ROUSSART. — *Elasticité et Photoélasticité*. Hermann et C^{ie}, Paris, Fr., 1940.
- (8) F. A. LONG et J. THOMPSON. — *Diffusion of water vapor in polymers* (Diffusion de la vapeur d'eau dans les polymères). *Polymer Sci.*, U. S. A., 1955, n° 15, 413.
- (9) A. PIRARD. — *La photoélasticité*. Dunod, Paris, Fr., 1947.
- (10) J. POMEY. — Durcissements superficiels. *Technique de l'Ingénieur*, Paris, Fr., 1957, n° 2, 1180-1186.
- (11) J. POMEY, A. GOUTEL et L. ABEL. — Détermination des contraintes résiduelles dans les pièces cimentées. *Anal. d. Contraintes*, Fr., 1961, n°s 5 et 6.
- (12) TIMOSHENKO. — *Théorie de l'élasticité*. Ch. Béranger, Fr., 1948, 219-220 et 390-393.

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Comportement des matériaux élastico-visqueux.

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 12 juin 1957.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

J. PÉRÈS.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

JEAN SARRAILH.

